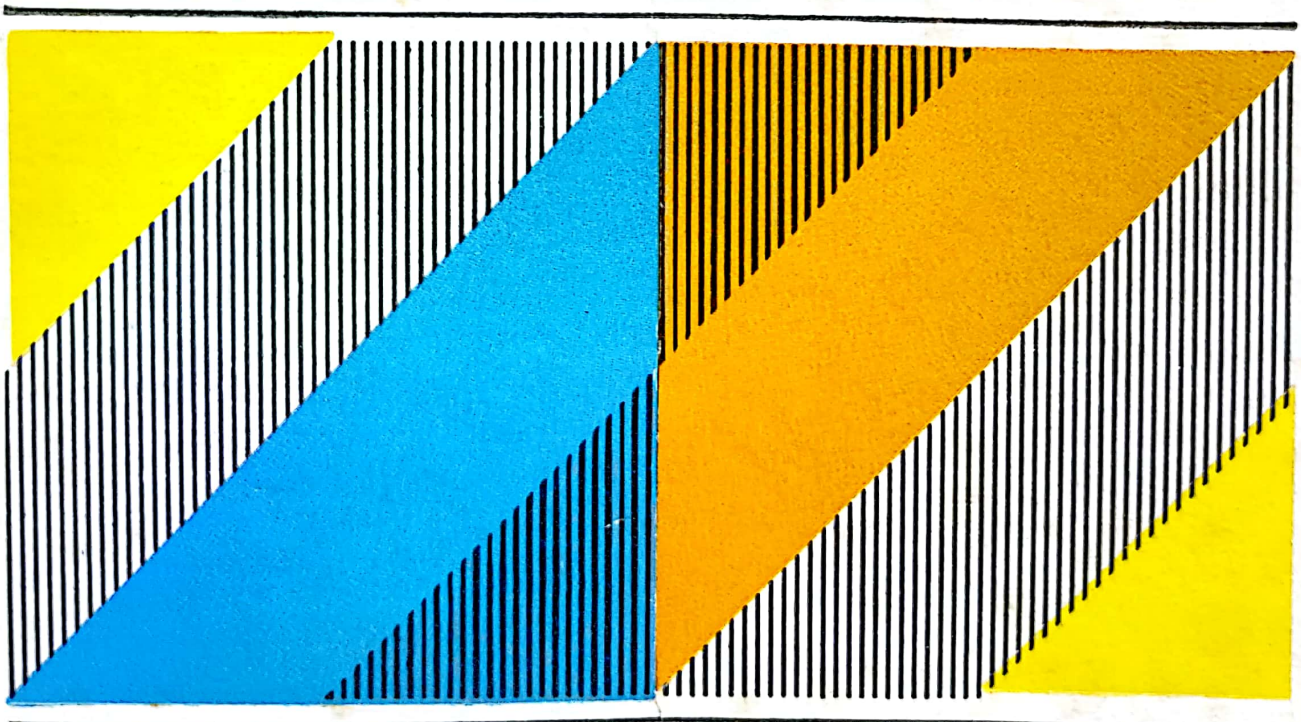
Eugen Cuteanu ● Radu Marinov

METODA ELEMENTELOR FINITE ÎN PROIECTAREA STRUCTURILOR



EDITURA FACLA

Scanned with OKEN Scanner

EUGEN CUTEANU RADU MARINOV

METODA ELEMENTELOR FINITE ÎN PROIECTAREA STRUCTURILOR

Domnului, as. univ.
Luca Lucian
din partea autorului

EUGEN CUTEANU RADU MARINOV

METODA ELEMENTELOR FINITE ÎN PROIECTAREA STRUCTURILOR

EDITURA FACLA
TIMIȘOARA, 1980

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Utilizarea tot mai largă a calculatoarelor electronice în activitatea de proiectare a construcțiilor a înlesnit, în ultima vreme, abordarea analizei unor structuri de mare complexitate. S-au depășit dificultățile de calcul pe care le prezintă structurile cu un grad ridicat de nedeterminare statică, analiza condusă în baza unor modele matematice mai evoluate asigurînd obținerea unor rezultate mai puțin „acoperitoare". Introducerea tehnicii de calcul electronic determină mutații importante și în concepția proiectării structurilor de rezistență, inginerul, degrevat de un volum mare de calcule, avînd posibilitatea de a-și desfășura, cu precădere, activitatea în direcția analizei și optimizării soluțiilor constructive.

Asistăm la o acțiune coordonată și sistematică de punere la dispoziția centrelor de calcul, aparținînd instituțiilor de proiectare sau teritoriale, de către Biblioteca națională de programe, a unor pachete de programe de calcul în domeniul analizei structurilor de construcții și a documentației de utilizare. Exploatarea curentă a acestor programe, permite, fără îndoială, o apreciere mai corectă a siguranței structurilor, prin posibilitatea efectuării unor calcule mai cuprinzătoare, privitoare la ipotezele de încărcare sau alcătuire constructivă.

Dintre metodele de analiză a structurilor, metoda de calcul cu elemente finite a cunoscut în ultimele două decenii o dezvoltare vertiginoasă, avînd în prezent o largă aplicabilitate în diverse domenii ale științelor tehnice (Mecanica construcțiilor, Electrotehnică, Termotehnică, Hidrotehnică etc.).

Scanned with OKEN Scanner

Aplicată la început în domeniul structurilor aeronautice, metoda elementelor finite și-a găsit utilizarea și în proiectarea structurilor de rezistență a construcțiilor, datorită multiplelor avantaje pe care le are. Astfel, formularea metodei prezintă o generalitate care permite abordarea analizei oricărui tip de structură, asigurînd totodată obținerea unor rezultate cantitative și calitative întotdeauna susceptibile la îmbunătățiri, în funcție de modul de discretizare ce se adoptă ; de asemenea, în baza formulării integral matriceale, metoda se prezintă optim prelucrării automate. Pe lîngă aceste avantaje, trebuie însă menționat dezavantajul volumului mare de date ce trebuie pregătite de către utilizator, precum și cantitatea însemnată de informații furnizate, care urmează a fi interpretate ; o automatizare a acestor operații, atenuează însă dezavantajele mai sus amintite.

În acest domeniu de activitate, în țara noastră se remarcă atît studii și publicații de certă valoare, cît și programe elaborate și utilizate în proiectarea unor structuri de rezistență. Cu toate acestea, metoda elementelor finite, cu aplicații la structurile continue bi și tridimensionale, nu are încă o utilizare curentă în proiectare, ceea ce se datorește pe de o parte dezavantajelor sus-amintite, dar pe de altă parte și unei asimilări mai restrînse a metodei de către majoritatea proiectanților.

Lucrarea de față își propune ca, prin descrierea succintă a metodei de calcul cu elemente finite și prin exemplele prezentate și comentate să-și aducă contribuția la popularizarea acestui procedeu de calcul.

În capitolul I se trec în revistă principiile generale ale metodei, se descriu cîteva tipuri de elemente finite, precum și aspecte legate de utilizarea practică a procedeului în domeniul elastic-liniar de comportare a structurilor.

În capitolul II sînt prezentate unele aplicații practice selectate din activitatea de proiectare și cercetare. Comentariile însoțitoare facilitează înțelerea metodei.

Capitolul III tratează analiza structurilor complexe sau de dimensiuni mari, cu ajutorul procedeului de divizare în substructuri, ca o modalitate optimă de rezolvare.

Capitolul IV este dedicat analizei modului de cedare a structurilor fără comportare ductilă, în baza unui procedeu de calcul biografic, avînd prin aceasta o tematică ce se înscrie în domeniul Mecanicii ruperilor.

Aspectele legate de utilizarea metodei în analiza structurilor solicitate static, în domeniul elastic-liniar sînt prezentate într-un număr limitat de cazuri, din motive de spațiu. Din același motiv, nu au fost

Scanned with OKEN Scanner

abordate nici probelemele de comportare neliniară sau cele privitoare la răspunsul la acţiuni dinamice.

Autorii aduc pe această cale mulţumiri profesorului emerit ing. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei R.S.România pentru utilele sugestii făcute cu ocazia recenzării manuscrisului şi sprijinului acordat pentru elaborarea acestei lucrări.

De asemenea, autorii speră ca, prin prezentarea acestei cărţi, cititorul să-şi poată completa cunoştinţele şi stimula interesul în aplicarea metodei de calcul cu elemente finite. Totodată, ei vor primi cu recunoştinţă orice sugestie sau observaţie, în scopul unor îmbunătăţiri într-o ediţie viitoare.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

Considerații generale asupra metodei de calcul cu elemente finite

1.1. INTRODUCERE

Metodele analitice oferite de Teoria elasticității au un cîmp restrîns de aplicabilitate în practica inginerească, datorită dificultăților care survin în cadrul integrării ecuațiilor diferențiale ale problemei. Aceste dificultăți pot fi generate pe de o parte de configurația geometrică a structurii, de modul uneori foarte complex de încărcare și rezemare a acesteia, sau pe de altă parte de varietatea proprietăților mecanice ale materialelor componente. Din acest motiv, un calcul analitic al stării de eforturi și deformații se conduce, în general, pe o structură simplificată geometrică, mecanic și uneori chiar și fizic, iar rezultatele obținute supuse unei analize prin prisma simplificărilor introduse sînt racordate la valori controlate experimental sau prin alte procedee de calcul. Avînd în vedere că obiectivul principal al oricărui inginer este acela de a obține, pentru problemele cu care este confruntat, soluții eficiente din punct de vedere practic, s-a înregistrat în ultima vreme o preferință în utilizarea metodelor numerice de rezolvare a problemelor Teoriei elasticității. Soluțiile aproximative obținute pot satisface exigențele inginerești în proiectarea diferitelor structuri de rezistență,

Scanned with OKEN Scanner

mult mai bine decît soluțiile „exacte" mai sus amintite. O asemenea metodă este cea a diferențelor finite, în care ecuațiile diferențiale sînt înlocuite cu sisteme de ecuații algebrice, soluțiile problemei fiind obținute în nodurile rețelei care s-a folosit în definirea diferențelor finite.

Față de procedeul prin diferențe finite, în cadrul căruia aproximarea făcută are un caracter pur matematic, *metoda elementelor finite* se bazează pe o concepție calitativ diferită, aproximarea provenind în urma unei discretizări de natură fizică. Astfel, metoda consideră structura continuă care se cercetează ca fiind alcătuită din mai multe părți mici, discrete, numite elemente finite, continue în cuprinsul lor și legate între ele în anumite puncte numite noduri, în care se vor obține soluțiile problemei. Analiza corpului complex este redusă la studiul elementelor componente ale structurii rezultate prin discretizarea sa. Pentru a cunoaște comportarea structurii, a întregului, va fi necesar să se cerceteze întîi elementul finit, adică partea motiv pentru care procedeul mai este numit uneori, foarte sugestiv, „*going from part to whole*", adică „*mergînd de la parte la întreg*". Aspectul fundamental al metodei elementelor finite îl constituie generalizarea metodei Rayleigh-Ritz și Galerkin. Originalitatea ei constă în faptul că procedeul metodelor amintite se aplică nu structurii întregi, ci elementului finit. În privința analizei elementului finit, aceasta se concretizează în cele din urmă în stabilirea unor caracteristici globale, ca, de exemplu, rigiditatea sa, care servesc apoi la reconstituirea structurii, prin operația numită de asamblare [5]. Conceperea elementelor finite, adică stabilirea formei acestora, precizarea numărului de noduri în care acestea se interconectează și a naturii acestor legături trebuie făcută de așa manieră încît să se asigure posibilitatea de reconstituire cît mai fidelă a structurii date. Din punct de vedere matematic, asamblarea conduce la un sistem de ecuații algebrice, avînd ca necunoscute, de exemplu, deplasările nodurilor, valori cu care se poate deja trece la determinarea tensiunilor în fiecare element.

Cu toate că prin această metodă analiza structurii s-a simplificat substanțial, trebuie observat că, și în cazul unei discretizări relativ grosiere, volumul de calcul devine atît de mare încît utilizarea calculatoarelor electronice este indispensabilă. Metoda, în esență, se consideră pe bună dreptate, un produs al erei calculatoarelor elec-

Scanned with OKEN Scanner

tronice moderne. În comparație cu alte modalități de calcul, metoda elementelor finite oferă avantaje deosebite, ceea ce a făcut să-și găsească o largă aplicabilitate în cele mai variate sectoare ale cercetării științifice, fiind utilizată și în Mecanica construcțiilor, la rezolvarea problemelor din domeniul structurilor cu caracter civil, industrial, hidrotehnic sau al construcțiilor de nave maritime, aeronave sau nave cosmice. Astfel, operația de discretizare a structurii prin suplețea ei, permite rezolvarea oricăror structuri, indiferent de geometria mediului solid analizat. Totodată, diversitatea cazurilor ce trebuie rezolvate este mult redusă, deoarece analiza este efectuată la nivelul elementelor componente și nu la nivelul structurii întregi. Metoda se extinde fără dificultăți și în domeniul neomogenităților fizice, al neliniarităților fizice și goemetrice, putîndu-se aborda cu ușurință probleme ca interacțiunea teren-fundație-structură, calculul galeriilor, probleme legate de pierderea stabilității locale sau generale etc., iar introducerea condițiilor la limită nu mai comportă nici un fel de dificultăți, aceasta rezumîndu-se la precizarea restricțiilor impuse în unele noduri. Rezultatele care se obțin se pot îmbunătăți prin alegerea adecvată a mărimii și formei elementelor. O discretizare judicioasă va urmări prezența concentratorilor de tensiune, îndesind elementele finite în zona acestora. Metoda asigură prin urmare o cercetare profundă, amănunțită și completă a structurilor [12]. Printre avantajele metodei, trebuie subliniat în mod deosebit faptul că algoritmul de calcul, adecvat automatizării, și deci formulat matriceal, prezintă un *caracter de unicitate*; el rămîne în esență același, indiferent de tipul elementului finit și permite o abordare unitară a analizelor statice și dinamice, cît și neliniare a structurilor.

Rezolvarea propriu-zisă se poate conduce fie în spiritul *metodei deplasărilor*, cînd caracteristicile globale ale elementelor finite vor fi reprezentate prin rigidități ale acestora, regrupate într-o matrice (metoda matricei de rigiditate), fie în spiritul *metodei eforturilor*, caracteristicile globale ale elementelor finite fiind reprezentate prin flexibilități (metoda matricei de flexibilitate). Uneori se preconizează și un procedeu mixt. Dintre acestea, metoda deplasărilor este preferată, fiind avantajoasă în privința automatizării integrale a rezolvării și fiind totodată mai ușor de intuit; în lucrarea de față se va utiliza aceasta din urmă.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. DESCRIEREA GENERALĂ A METODEI

Analiza stării de eforturi şi deformaţii a unei structuri cu metoda elementului finit comportă următoarele şase etape importante:

a) **Discretizarea structurii.** Structura dată se subîmparte în elemente finite, numerotate de la 1 la n, precizîndu-se apartenenţa fiecărui element la mulţimea nodurilor sale de conexiune (fig. 1.1). Se defineşte astfel topologia modelului pe care se conduce calculul. Cu toate că în cazul unor structuri avînd forme regulate, operaţia poate fi automatizată, rolul inginerului rămîne esenţial, cel puţin în privinţa alegerii formei şi dimensiunilor elementelor. În cazul unor structuri avînd o geometrie neregulată, o experienţă dobîndită în Mecanica construcţiilor privitoare la răspunsul structurilor la acţiunile exterioare este necesară şi totdeauna binevenită. În unele cazuri, însăşi dimensiunile mediului continuu ce se supune discretizării trebuie alese în mod judicios, pentru a asigura obţinerea unor rezultate concludente. Un astfel de exemplu îl constituie stabilirea dimensiunilor terenului din vecinătatea corpului unui baraj de greutate (fig. 1.1).

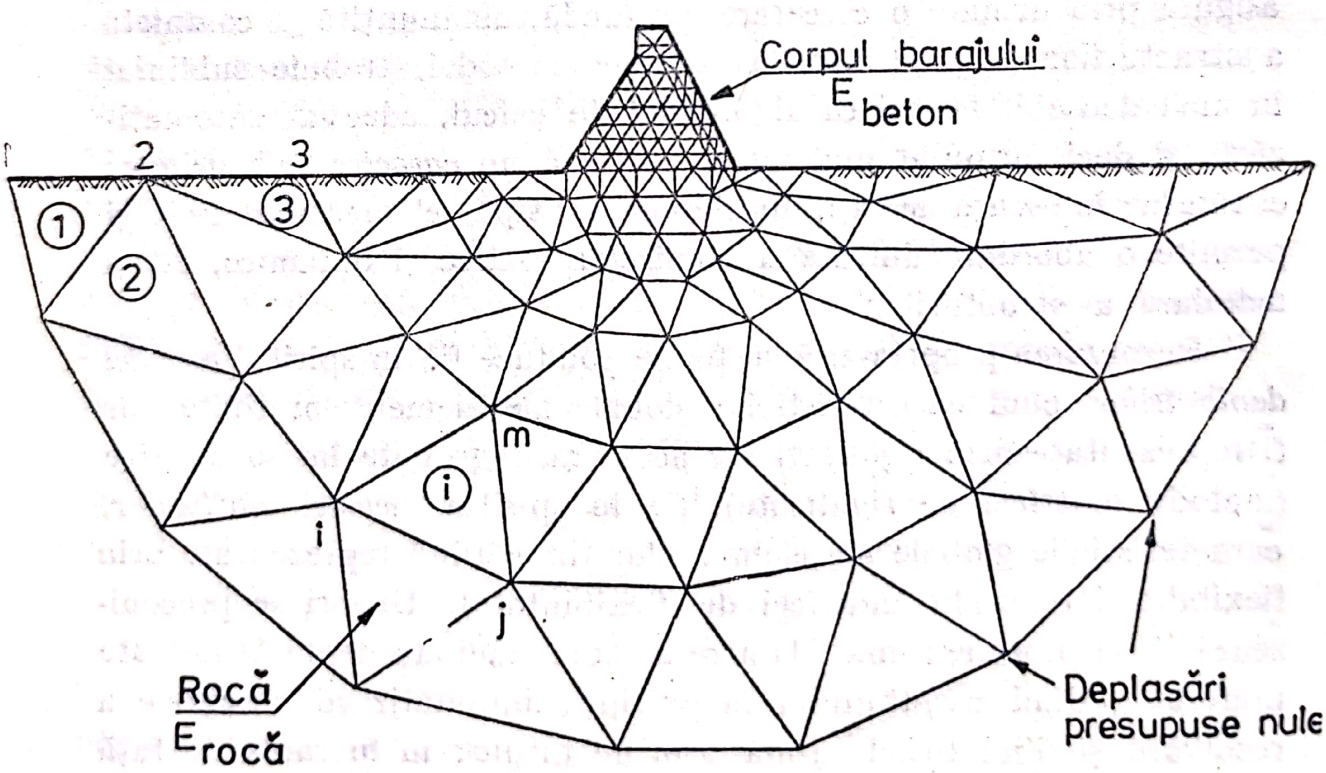


Fig. 1.1.

b) **Alegerea tipului de elemente finite.** Elementele finite diferă între ele prin forma lor geometrică, caracteristicile fizice ale materialului din care sînt alcătuite şi numărul, respectiv tipul deplasărilor independente care se ataşează nodurilor. Pentru determinarea caracteristicilor sintetice ale unui element finit, se acceptă o lege convenţională de variaţie în cuprinsul elementului, a deplasărilor, numit cîmp de deplasări sau a tensiunilor, numit cîmp de tensiuni. Aceste legi se aleg de preferinţă sub forma unor polinoame, care introduc un număr de coeficienţi arbitrari şi care se determină din condiţii de compatibilitate cu anumite proprietăţi. Întrucît cîmpul de deplasări sau de tensiuni ales nu reprezintă exact variaţia reală a deplasărilor sau a tensiunilor pe domeniul elementului finit, aceasta constituie cauza principală a aproximaţiilor pe care le face metoda ca atare. De aceeea, alegerea tipului de element finit se corelează cu modul în care se face discretizarea structurii, şi va avea în vedere următoarele aspecte :

— Alegerea unui model de element constitutiv sau altul trebuie făcută ţinînd seama că o precizie mărită a rezultatelor se repercutează în augmentarea cantităţii de calcule. De exemplu, în cazul plăcilor plane, dacă momentele încovoietoare şi forţele tăietoare au o variaţie lentă se poate accepta modelul Kirchhoff (clădit pe ipoteza lui Bernoulli generalizată, prin care segmentul normal la placă rămîne normal la suprafaţa mediană şi după deformare), în timp ce în cazul unor variaţii relativ rapide ale acestor eforturi devine necesară adoptarea unor modele mai complexe, cum este, de exemplu, modelul Reissner (care defineşte cîmpul de deplasări considerînd şi efectul forţelor tăietoare).

— Avînd în vedere varietatea mare a tipurilor de elemente finite, alegerea unui anumit tip trebuie făcută în corelare cu soluţia de discretizare care a fost adoptată. Dacă forma domeniului discretizat şi încărcările corespunzătoare sînt relativ „liniştite", sînt preferate elementele finite complexe, avînd un număr ridicat de grade de libertate, în timp ce cazul unor forme „agitate" a domeniului discretizat sînt abordate eficient cu elemente mai simple, dar cu o discretizare deasă, ceea ce permite urmărirea fidelă a conturului şi totodată menţinerea numărului de necunoscute, pe ansamblul calculelor, în limite economice [12].

— Procedeul de investigaţie cu metoda elementului finit permite renunţarea la modelele clasice de calcul, familiare inginerilor, structura putîndu-se idealiza cu grade de eroare diferite, în funcţie

Scanned with OKEN Scanner

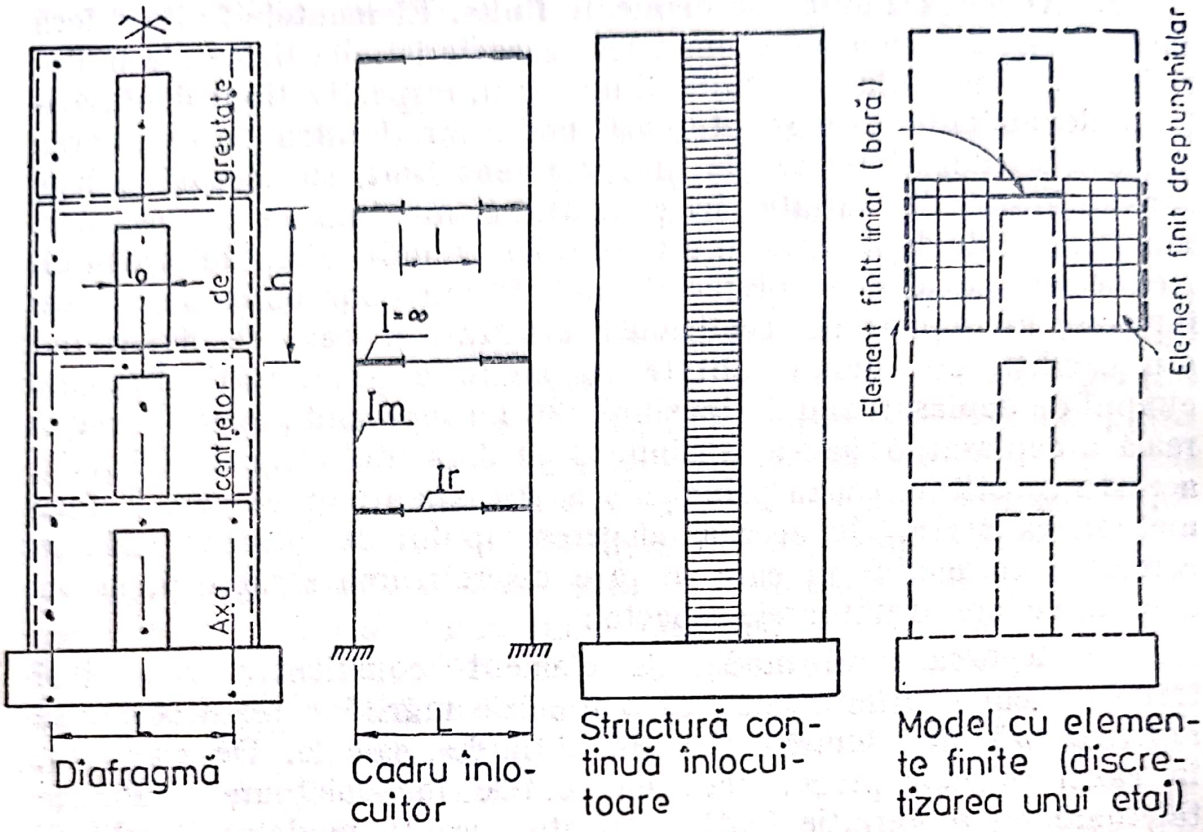


Fig. 1.2.

de posibilități și de efortul acceptat în realizarea fiecăreia din ele (fig. 1.2).

— Forma structurii poate impune utilizarea simultană a mai multor tipuri de elemente finite. Astfel, în cazul unei diafragme-cadru este rațională folosirea elementului finit dreptunghiular plan și al barei.

c) **Alcătuirea matricei de rigiditate sau flexibilitate a elementului finit.** Odată ce tipul elementului finit a fost precizat și cîmpul de deplasări sau tensiuni definit, se poate trece la alcătuirea ecuației matriceale care exprimă proprietățile statice sau cinematice ale elementului. De exemplu, în domeniul acțiunilor statice, în baza unui cîmp de deplasări ales, se pot scrie ecuațiile de echilibru între forțele aplicate în nodurile elementului finit, numite „forțe nodale" pe de o parte și forțele interioare pe de altă parte. Acestea din urmă se exprimă în funcție de rigiditatea elementului și deplasările nodurilor sale. Pentru determinarea elementelor de rigiditate, pot fi folosite următoarele procedee:

1. *Procedeul direct,* avînd la bază metoda clasică a deplasărilor.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Procedeul variațional*, care comportă minimizarea energiei potențiale totale a solidului elastic, în baza principiului valorii staționare a energiei potențiale. Spre deosebire de procedeul direct, aplicabil numai în cazul unor cîmpuri de deplasări sau tensiuni simple, procedeul variațional poate fi utilizat în cele mai complicate cazuri.

3. *Procedeul valorilor reziduale* (metoda Galerkin), care avînd la bază o tehnică de obținere a unor soluții aproximative a ecuațiilor diferențiale liniare sau neliniare, este indicat în situațiile cînd funcționala de minimizat se obține cu dificultăți sau cînd aceasta nu există [7].

4. *Procedeul bilanțului energetic*, care bazîndu-se pe prima lege a termodinamicii, extinde considerabil gama de probleme ce pot fi investigate cu metoda elementelor finite.

d) **Asamblarea.** Însușirile de comportare mecanică a structurii întregi rezultă din aportul fiecărui element finit. Astfel, rigiditatea structurii se obține prin „asamblarea" rigidităților elementelor finite, ceea ce matematic revine în a combina ecuațiile matriceale care exprimă comportarea elementelor finite în parte și a obține ecuația matriceală care exprimă comportarea structurii întregi. La baza acestei operații stă faptul că, într-un nod comun mai multor elemente finite valoarea variabilei cîmpului de definiție (de deplasări sau tensiuni) este aceeași pentru toate elementele cuplate în acel nod. Înainte de a trece la rezolvarea sistemului de ecuații algebrice astfel obținut, acesta se modifică în funcție de condițiile la limită (de rezemare) pe care trebuie să le respecte structura. Întreaga operație se face automat de către calculatorul electronic.

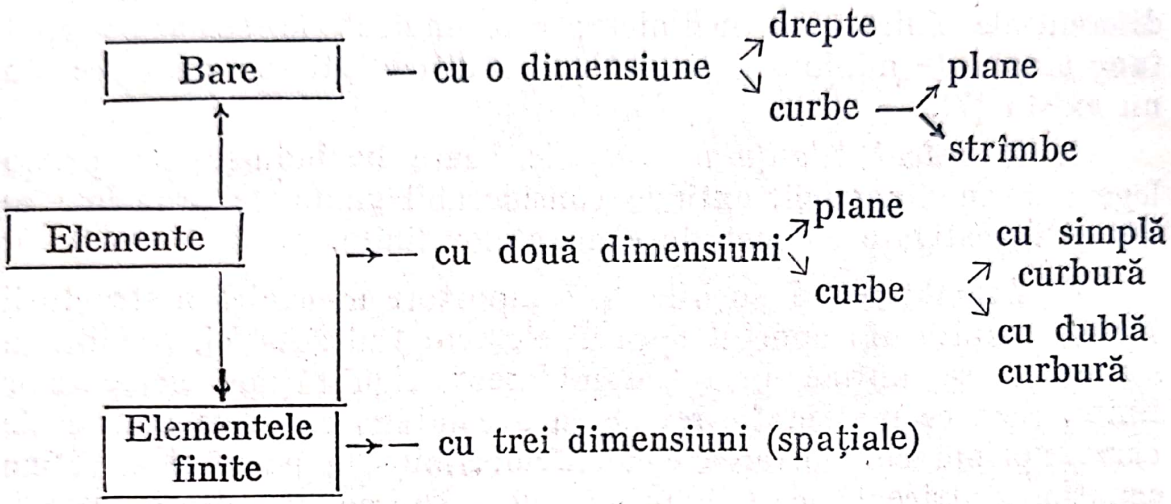
e) **Rezolvarea sistemului de ecuații.** Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin valorile nodale ale variabilelor cîmpului și anume, deplasările nodurilor sau forțelor de legătură din acestea, după cum problema s-a rezolvat cu metoda deplasărilor sau eforturilor. Dacă sistemul de ecuații este liniar, rezolvarea se face în baza algoritmilor de calcul cunoscuți; în timp ce în cazul sistemelor neliniare, soluțiile rezultă iterativ, necesitînd modificări ai coeficienților necunoscutelor și uneori și a termenilor liberi.

f) **Calcule auxiliare.** Uneori soluțiile sistemului de ecuații sînt folosite pentru a obține alte mărimi derivate din necunoscutele primare. Așa de exemplu, deplasările nodurilor servesc în continuare la calculul deformațiilor specifice și a tensiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

1.3. MĂRIMI CARACTERISTICE ALE ELEMENTULUI FINIT

Din punct de vedere geometric, elementele se pot clasifica astfel [3]:



Din punctul de vedere al formulării ecuațiilor matriceale, referitoare la proprietățile statice ale elementelor, barele și elementele finite prezintă particularități distinctive. În timp ce bara, ca element constitutiv deține numai *două* noduri de contact cu restul structurii, un element finit, ca parte a unui mediu continuu, are *mai multe* puncte de conexiune cu diverse tipuri de legături în dreptul acestora. Din acest motiv, în cazul barei, forma acesteia nu prezintă nici o importanță din punctul de vedere al scrierii ecuațiilor matriciale mai sus amintite. De asemenea, obținerea cîmpului de deplasări este esențial diferită la bare, respectiv la elemente finite. În cazul barelor, pentru obținerea elementelor de calcul dorite, se poate preconiza fie procedeul integrării exacte sau numerice a ecuației diferențiale ordinare a deformatei, fie relații de tip Mohr-Maxwell. În cazul elementelor finite însă, această cale prezintă mari dificultăți în obținerea unor soluții care să asigure condițiile de compatibilitate geometrică în lungul liniilor sau suprafețelor de separație. Inconvenientul este eliminat prin adoptarea unor *legi convenționale de variație a deplasărilor*, a unor funcții standard, care nu pot fi soluții exacte, dar facilitează scrierea relațiilor matriceale privitoare la starea de deformație și de tensiune a elementului

Scanned with OKEN Scanner

finit respectiv. Bineînțeles, procedeul poate fi aplicat și barelor, prin aceasta justificîndu-se denumirea de element finit, dată uneori acestora [12].

Din punct de vedere matematic, cîmpul de deplasări se definește, de obicei, sub forma unui polinom, datorită atît avantajelor de calcul pe care acestea le oferă, cît și facilității de a efectua un control asupra aproximațiilor comise. În figura 1.3 se poate urmări diferența între soluția exactă, corespunzătoare unui polinom cu un număr infinit de termeni și soluția aproximată de polinoame cu un număr finit de termeni. Figura ilustrează modul în care soluția exactă a unei deplasări u_x este aproximată cu polinoame de diferite grade, avînd forma generală :

$$u_{(x)}=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\ldots+\alpha_{n-1}x^n. \tag{1.1}$$

Coeficienții α_i sînt așa-zisele *coordonate generalizate* ale elementului finit respectiv. Numărul termenilor menținuți în expresie definește forma cîmpului de deplasări, iar valoarea acestora precizează amplitudinile coordonatelor generalizate. În cazul unui element plan, expresia polinomială a cîmpului de deplasări, scrisă matriceal, este

$$\{\tilde{u}\}=\{u\,(x,\ y)\}=\begin{Bmatrix}u\,(x,\ y)\\ v\,(x,\ y)\end{Bmatrix}=[\Phi]\{\alpha\}=\begin{bmatrix}\{\Phi_1\}^T & 0\\ 0 & \{\Phi_1\}^T\end{bmatrix}\{\alpha\}, \tag{1.2}$$

unde :

$$\{\Phi_1\}^T=[1\ \ x\ \ y\ \ x^2\ \ xy\ \ y^2\ldots y^n] \tag{1.3}$$

și

$$\{\alpha\}^T=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ldots\alpha_{2m}]. \tag{1.4}$$

Introducerea în calcule a funcțiilor Φ, de tipul (1.3), reprezentînd singurul element convențional al metodei, ridică probleme de

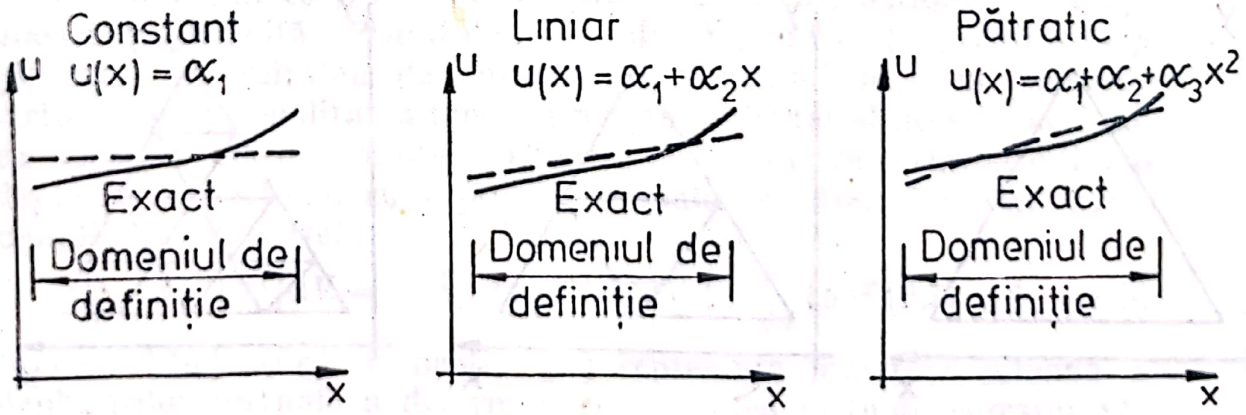


Fig. 1.3.

convergență a soluțiilor. Astfel, condiția principală pe care trebuie să o îndeplinească aceste funcții este aceea ca soluția aproximată de ele să tindă spre soluția exactă, odată cu creșterea numărului de elemente. Condiția matematică a convergenței presupune că îndesirea elementelor în cadrul discretizării se face sub o formă regulată, adică se respectă următoarele reguli :

a) Micșorarea elementelor este în așa fel efectuată, încît orice punct al domeniului se găsește în interiorul unui element (fig. 1.4).

b) Orice rețea este conținută de rețeaua mai fină.

c) Forma funcțiilor este păstrată aceeași în procesul de îndesire.

În cazul contururilor curbe, utilizarea elementelor cu margini drepte, lezează primele două condiții, astfel încît problema convergenței nu mai poate fi pusă cu rigurozitate matematică. Totuși, și în aceste cazuri soluțiile care se obțin sînt pe deplin satisfăcătoare din punct de vedere ingineresc. Se arată [5] că, pentru a asigura convergența, modelul de deplasări (1.3) trebuie să satisfacă următoarele cerințe :

1) Matricele [Φ] trebuie alese în așa fel încît să fie asigurată continuitatea deplasărilor pe interfețele elementelor și astfel energia de deformare acumulată de acestea să fie nulă.

2) Matricele [Φ] trebuie să asigure existența unor deplasări compatibile cu o stare de deformație constantă pe domeniul elementului finit.

3) În cazul unei deplasări rigide prin roto-translație a elementului finit, utilizînd matricea [Φ] trebuie să rezulte că elementul nu se deformează.

Dacă legea polinomială, privind variația deplasărilor în interiorul elementului, cuprinde un set complet și finit de funcții,

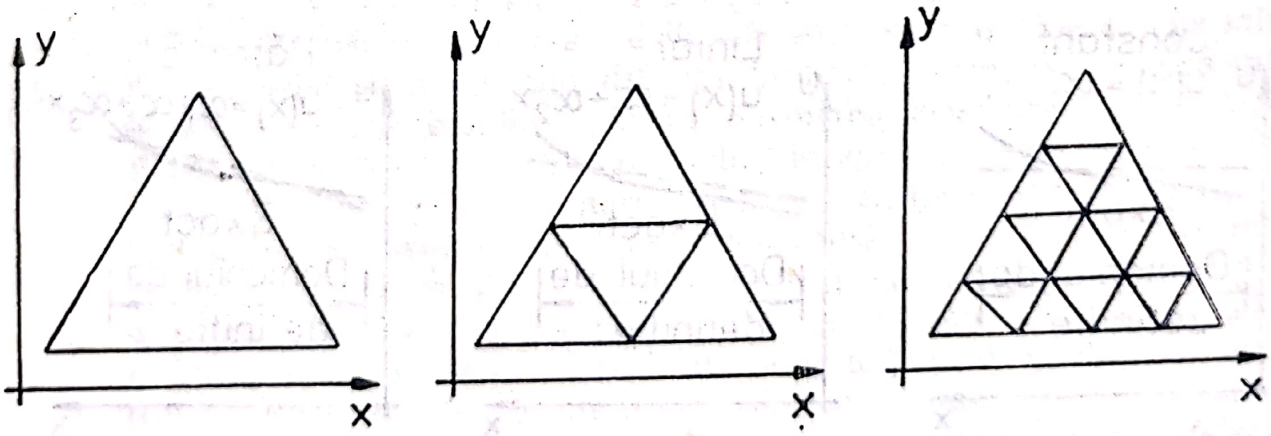


Fig. 1.4.

se demonstrează [1] că aceasta este o condiție necesară și suficientă pentru a asigura continuitatea atît în element, cît și pe conturul acestuia a deplasărilor propriu-zise și a primelor lor derivate. Elementele finite corespunzătoare se numesc *conforme*. Trebuie observat că, în timp ce condiția de continuitate în interiorul elementului poate fi satisfăcută cu primul termen al polinomului, care este o constantă, continuitatea deplasărilor pe contur necesită considerarea unui număr mai mare de termeni. Polinomul este numit *complet*, dacă numărul coeficienților arbitrari este egal cu numărul variabilelor nodale atașate elementului, numit gradul de libertate al acestuia. Elementele finite la care sînt respectate condițiile 2 și 3 se numesc *complete*. Există însă tipuri de elemente finite, ca, de exemplu, cele plane, folosite în analiza plăcilor încovoiate, care nu respectă toate condițiile enumerate mai sus. Totuși, cu satisfacerea condiției 2 și a condiției de continuitate a deplasărilor, datorită unei bune convergente, se pot obține și în asemenea situații rezultate satisfăcătoare [12].

În literatura consacrată metodei elementelor finite, elementele tratate în baza unui cîmp de deplasări, așa cum s-a arătat mai sus, intră în categoria modelelor *geometric compatibile*, iar cele care au la bază un cîmp de tensiuni, fac parte din categoria modelelor *static compatibile*.

Pentru a defini, mai fluent, mărimile caracteristice semnificative ale unui element finit se dezvoltă metoda de calcul în baza modelului geometric compatibil, pornind de la principiul lucrului mecanic virtual, formulat matriceal [9]. Totodată, elementele de calcul se exemplifică pe schema elementului finit triunghiular plan, folosit pentru prima dată de M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin și L.C. Topp, în analiza unor probleme plane de elasticitate. Așadar, presupunînd un corp elastic în stare de echilibru acționat de forța masică γ (definită pe unitatea de volum) și de forța distribuită p (definită pe unitatea de suprafață), principiul lucrului mecanic virtual enunță egalitatea lucrului mecanic virtual al acestor acțiuni, cu energia de deformație virtuală în condițiile compatibilității deplasărilor virtuale cu legăturile corpului elastic. Matriceal, principiul se scrie astfel:

$$\int_V \{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}dV = \int_V \{\gamma\}^T\{\delta\tilde{u}\}dV + \int_A \{p\}^T\{\delta\tilde{u}\}\,dA, \quad (1.5)$$

în care $\{\delta\tilde{u}\}$, $\{\delta\varepsilon\}$, respectiv $\{\sigma\}$ reprezintă matricea coloană a deplasărilor virtuale a deformațiilor specifice virtuale corespunzătoare, respectiv a tensiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

Limitînd deformațiile corpului la domeniul elastic de comportare, cu legea lui Hooke generalizată

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}, \tag{1.6}$$

în care $[D]$ este matricea de elasticitate, ecuația (1.5) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D]\ \{\varepsilon\}\ dV = \int_V \{\delta\tilde{u}\}^T \{\delta\} dV + \int_A \{\delta\tilde{u}\}\{p\}\, dA. \tag{1.5'}$$

Ecuația (1.5') cuprinde atît ecuațiile diferențiale de echilibru, condițiile de margine, relațiile între deplasările elastice și deformațiile specifice, cît și relațiile fizice între deformații și tensiunile corespunzătoare, dar sub această formă nu sînt încă precizate condițiile de continuitate. Acestea se introduc nu pentru întreaga structură ci doar pentru un singur element finit al structurii, prin intermediul unui cîmp de deplasări, care în cazul general al problemelor spațiale se scrie matriceal sub forma;

$$\{\tilde{u}\}=[\Phi(x,\ y,\ z)]\{\alpha\}. \tag{1.7}$$

Pentru elementul finit triunghiular plan, reprezentat în figura 1.5, cîmpul de deplasări (1.2) se definește prin două polinoame de gradul întîi

$$\begin{aligned} u\ (x,\ y) &= \alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \\ v\ (x,\ y) &= \alpha_4+\alpha_5 x+\alpha_6 y, \end{aligned} \tag{1.8}$$

având un număr de coeficienți α arbitrari, egal cu numărul gradelor de libertate pe care le are elementul finit. Întrucît numărul termenilor fiecărei funcții de deplasări este egal cu numărul nodurilor elementului, condiția de conformabilitate a cîmpului de deplasări este satisfăcută. În acest sens, se poate observa imediat că dacă funcțiile (1.8) verifică deplasările a două noduri ale elementului finit, latura care le unește rămîne dreaptă și după deformație. Deoarece nodurile aparțin și elementului învecinat, rezultă identitatea deformațiilor elementelor învecinate în lungul liniilor de separație.

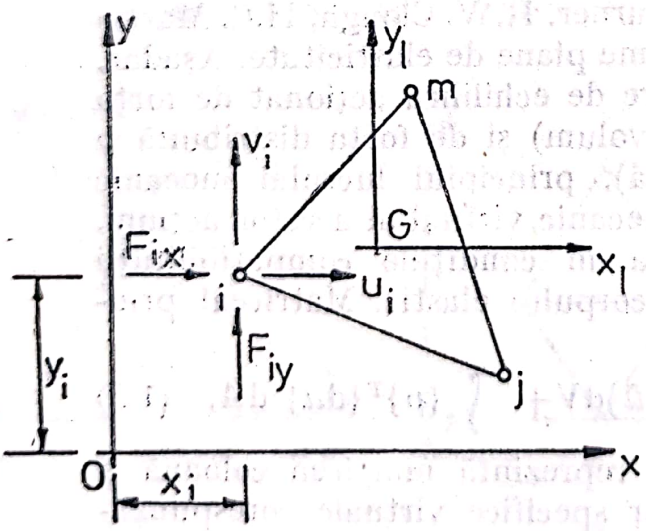


Fig. 1.5.

Scanned with OKEN Scanner

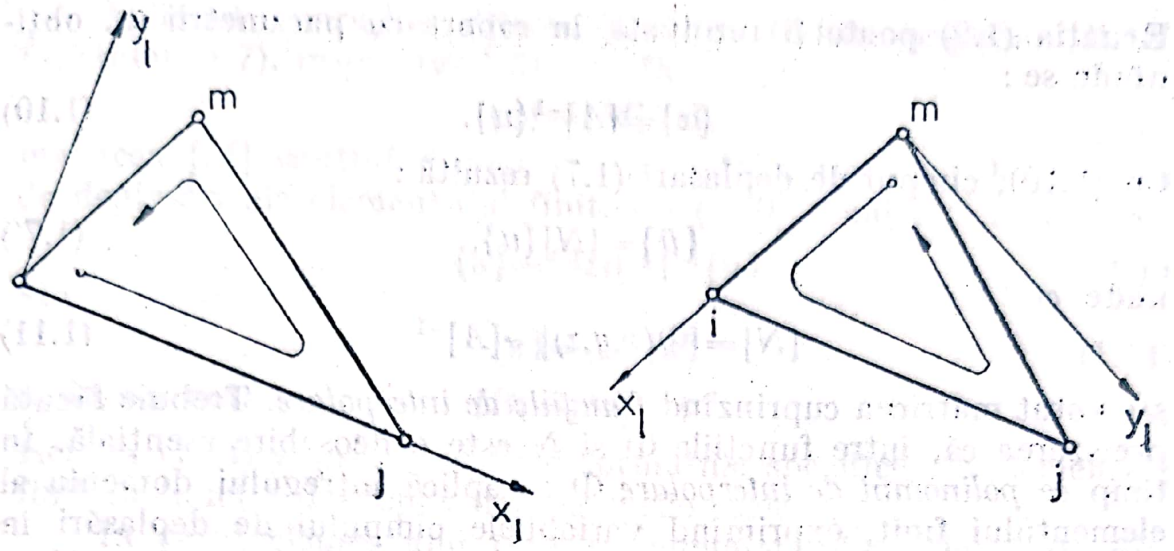


Fig. 1.6.

Coordonatele unui punct curent al elementului finit, x și y, de definesc în general față de un sistem de referință *local*, propriu, alegerea acestuia urmărind simplificarea calculelor. În figura 1.6 se arată alegerea automată a sistemului, în funcție de definirea topologică a elementului, iar în figura 1.5 acest sistem este plasat în centrul său de greutate, axele locale fiind paralele și de același sens cu cele generale în care s-a definit structura. Dacă cîmpul de deplasări (1.7), sau în particular (1.8), se particularizează pentru nodurile elementului finit, rezultă :

$$\{u\}=[A]\{\alpha\}, \tag{1.9}$$

elementele matricei $[A]$ reprezentînd coordonate ale nodurilor elementului.

Pentru elementul triunghiular din figura 1.5, de exemplu, ecuația matriceală (1.9) este :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}. \tag{1.9'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (1.9) poate fi rezolvată în raport cu parametrii α_i, obținîndu-se :

$$\{\alpha\}=[A]^{-1}\{u\}. \tag{1.10}$$

Cu (1.10), cîmpul de deplasări (1.7) rezultă :

$$\{\tilde{u}\}=[N]\{u\}, \tag{1.7'}$$

unde cu

$$[N]=[\Phi(x,y,z)]\cdot[A]^{-1} \tag{1.11}$$

s-a notat matricea cuprinzînd *funcțiile de interpolare*. Trebuie făcută precizarea că, între funcțiile Φ și N este o deosebire esențială. În timp ce *polinomul de interpolare* Φ se aplică întregului domeniu al elementului finit, exprimînd variabilele cîmpului de deplasări în funcție de coordonatele generalizate, *funcțiile de interpolare* N se referă la un anumit nod și la un anumit grad de libertate al acestuia. Din ecuația (1.7') se poate observa că funcțiunea N_i referitoare la nodul i ia valoarea unitară pentru nodul i și zero pentru celelalte noduri ale elementului [7]. Pe de altă parte, între deformațiile specifice și componentele deplasării elastice ale unui punct curent există relații diferențiale, care se pot scrie matriceal sub forma :

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u(x,y,z)\\ v(x,y,z)\\ w(x,y,z)\end{Bmatrix}=[\mathfrak{D}]\{\tilde{u}\}; \tag{1.12}$$

Pentru cazul problemelor plane, ecuația (1.12) se reduce la

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{Bmatrix}; \tag{1.12'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd operaţiile diferenţiale din (1.12), respectiv (1.12′) funcţiilor (1.7), respectiv (1.8) rezultă :

$$\{\varepsilon\}=[M]\{\alpha\}, \tag{1.13}$$

matricea $[M]$ conţinînd valorile derivatelor parţiale ale cîmpului de deplasări ale elementului finit. Cu (1.10) ecuaţia (1.13) devine :

$$\{\varepsilon\}=[M][A]^{-1}\{u\} \tag{1.14}$$

sau

$$\{\varepsilon\}=[B]\{u\}, \tag{1.14′}$$

unde s-a notat

$$[B]=[M][A]^{-1}. \tag{1.15}$$

Relaţia (1.14) exprimă astfel deformaţiile specifice ale elementului finit în funcţie de deplasările nodurilor sale.

În cazul elementului finit triunghiular plan (fig. 1.5), din (1.9′) rezultă

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0\\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0\\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0\\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m\\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m\\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m\end{vmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{Bmatrix}=[A]^{-1}\{u\}, \tag{1.16}$$

unde :

$$2\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix} \tag{1.17}$$

reprezintă dublul ariei triunghiului ijm, iar

$$\begin{aligned} a_i&=x_jy_m-x_my_j\\ b_i&=y_j-y_m=y_{jm}\\ c_i&=x_m-x_j=x_{mj}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

ceilalţi termeni obţinîndu-se din (1.17) prin permutarea circulară a indicilor.

Cu valorile $\alpha_i, \ldots, \alpha_6$, cîmpul de deplasări (1.8) se poate scrie sub forma :

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\frac{1}{2\Delta}[(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+\\ &\quad+c_my)u_m]\\ v(x,y)&=\frac{1}{2\Delta}[(a_i+b_ix+c_iy)v_i+(a_j+b_jx+c_jy)v_j+(a_m+b_mx+\\ &\quad+c_my)v_m], \end{aligned} \tag{1.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care se recunoaște că

$$[N]=\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}(a_i+b_ix+c_iy)\,;\quad \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}(a_j+b_jx+c_jy)\,;\quad \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}(a_m+b_mx+c_my)\right].$$

Pe de altă parte, utilizînd (1.12′) și cîmpul de deplasări (1.8), rezultă mai întîi

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\\\alpha_6\end{Bmatrix}=[M]\{\alpha\}, \tag{1.20}$$

iar cu (1.16)

$$\{\varepsilon\}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_i&0&b_j&0&b_m&0\\0&c_i&0&c_j&0&c_m\\c_i&b_i&c_j&b_j&c_m&b_m\end{bmatrix}\{u\}=[B]\{u\}. \tag{1.21}$$

Alegînd, așa cum s-a arătat mai sus, originea sistemului de axe local în centrul de greutate al elementului finit, rezultă că

$$x_i+x_j+x_m=y_i+y_j+y_m=0 \text{ și}$$

$$a_i=a_j=a_m=2\Delta/3,$$

ceea ce simplifică calculele.

Cu cele definite pînă aici se poate trece la explicitarea principiului (1.5′) pe domeniul elementului finit. În acest scop se aplică prima variație ecuației (1.14′), obținîndu-se vectorul deformațiilor specifice virtuale ale elementului finit, în funcție de vectorul deplasărilor virtuale ale nodurilor, adică

$$\{\delta\varepsilon\}=[B]\{\delta u\}. \tag{1.22}$$

Cu (1.22), principiul (1.5′) devine:

$$\int_V\{\delta u\}^T[B]^T[D][B]\{u\}dV=\int_V\{\delta u\}^T[N]^T\{\gamma\}dV+\int_A\{\delta u\}^T[N]^T\{p\}dA. \tag{1.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă cîmpul de deplasări care se utilizează este conform și deci condițiile de continuitate ale teoriei elasticității sînt satisfăcute, forma de scriere (1.23) reprezintă forma cea mai completă a principiului lucrului mecanic virtual. De această dată, față de scrierea anterioară (1.5'), sînt incluse, pe lîngă ecuațiile de echilibru, condițiile de margine, relațiile dintre deplasări și deformații, respectiv relațiile fizice între deformații și tensiuni și cele de continuitate a deformațiilor.

Cu notațiile

$$[k]^e = \int_V [B]^T [D][B] \mathrm{d}V \tag{1.24}$$

și

$$\{F\}^e = \int_V [N]^T \{\gamma\} \mathrm{d}V + \int_A [N]^T \{p\} \mathrm{d}A, \tag{1.25}$$

ecuația (1.23) se mai poate scrie și sub forma:

$$\{\delta u\}^T ([k]^e \{u\} - \{F\}^e) = 0, \tag{1.26}$$

sau

$$[k]^e . \{u\} = \{F\}^e, \tag{1.27}$$

avînd în vedere că deplasările virtuale $\{\delta u\}$ sînt diferite de zero. Ecuația (1.27) reprezintă ecuația fundamentală a metodei elementelor finite, în cazul modelului deplasării pure, scrisă pentru un singur element. Mărimea (1.24) se numește *matricea de rigiditate a elementului finit*, definită în raport cu un sistem de axe local. Întrucît elementele matricei $[k]^e$ depind în general de coordonatele punctului curent, calculul matricei începe prin efectuarea produselor matriceale pentru punctul curent, integrarea efectuîndu-se apoi pentru fiecare element al matricei. Această matrice rezultă singulară (determinantul ei este nul), deoarece elementele vectorului $\{F\}^e$ nu pot fi toate independente. Acest vector (1.25) reprezintă acțiuni aplicate numai în nodurile elementului și definite în așa fel ca să îndeplinească condițiile de echivalență cu acțiunile reale. Componentele lui rezultă punînd la baza calculului egalitatea lucrului mecanic produs de acțiunile reale în deplasarea punctelor lor de aplicație după o direcție arbitrară, cu lucrul mecanic al forțelor nodale echivalente în deplasarea nodurilor după aceeași direcție.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru un element finit triunghiular plan (fig. 1.5), avînd grosimea t constantă, matricea de rigiditate se obține din (1.24), integrînd pe aria elementului

$$[k]^e = \iint [B]^T[D][B]t \, dxdy. \tag{1.28}$$

În problemele plane de elasticitate, în ipoteza unui material izotrop, în cazul problemelor plane de tensiuni, matricea de tensiune este

$$[D] = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 2 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix}, \tag{1.29}$$

iar în cazul problemelor plane de deformații:

$$[D] = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 2(1-\mu) & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\mu \end{bmatrix}, \tag{1.30}$$

E și μ fiind modulul de elasticitate, respectiv coeficientul contracției transversale ale materialului. Dacă se presupune că prin descreșterea dimensiunii elementelor, cîmpul de deplasări ales asigură o convergență a soluției, matricele din expresia rigidității fiind totodată independente de x și y, calculul se simplifică la

$$[k]^e = [B]^T[D] \cdot [B]t\Delta, \tag{1.31}$$

Δ fiind aria triunghiului definit cu (1.17).

Matricea $[B]$ din (1.21) se poate pune sub forma:

$$[B] = [B_i \; B_j \; B_m] \tag{1.32}$$

unde, de exemplu

$$[B_j] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}. \tag{1.33}$$

și astfel matricea de rigiditate se partiționează. În general, numărul submatricelor componente depinde de numărul nodurilor elementului finit. În cazul elementului cu trei noduri i, j, m, rezultă

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}, \tag{1.34}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

$$[k_{rs}]=[B_r]^T[D][B_s]t\Delta,\ r_s=\ i,\ j,\ m \tag{1.35}$$

sînt submatrici avînd dimensiunile 2×2. Forma (1.35) prezintă avantaje din punctul de vedere al calculului automat, în sensul că, submatricele componente se depun mai facil, în matricea globală de rigiditate a structurii discretizate, în cadrul operației de asamblare. Astfel, singularitatea matricelor $[k]^e$ nu reprezintă interes, rezolvarea ecuațiilor (1.27) nefiind necesară.

Dezvoltînd produsele matriceale din (1.31) se constată că matricea $[k]^e$ este simetrică față de diagonala principală, elementele sale fiind alcătuite cu caracteristicile geometrice și fizice ale elementului finit.

1.4. FORMULAREA VARIAȚIONALĂ A MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE ELEMENTULUI FINIT

În vederea determinării ecuației fundamentale a metodei elementelor finite, se supune minimizării funcționala

$$\pi=W_d-L \tag{1.36}$$

a potențialului solidului elastic, definit prin intermediul energiei de deformație W_d și a lucrului mecanic de intensitate finală a acțiunilor exterioare L. Minimizarea funcționalei (1.36) reprezintă formularea matematică a principiului valorii staționare a energiei potențiale totale, conform căreia dintre toate cîmpurile de deplasări geometric admisibile, acela care satisface și condițiile de echilibru, conferă energiei potențiale totale π, o valoare staționară care este totdeauna un minim.

Considerînd că structura dată este discretizată în elemente finite și cîmpul de deplasări aproximat prin intermediul celor n deplasări nodale

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \delta_n\end{Bmatrix}, \tag{1.37}$$

Scanned with OKEN Scanner

minimizarea energiei potențiale π, în raport cu aceste deplasări considerate ca parametrii conduce la sistemul de ecuații algebrice

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{\delta_i\}} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.38}$$

elementul de rang i al vectorului (1.37) putînd avea mai multe componente, de exemplu

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}. \tag{1.39}$$

Considerînd că potențialul π al structurii întregi rezultă prin însumarea potențialelor elementelor finite componente π^e și din lucrul mecanic al forțelor exterioare aplicate în noduri $\{F\}$, adică

$$\pi = \Sigma \pi^e - \{F\}^T \{\delta\}, \tag{1.40}$$

condiția (1.38) poate fi scrisă :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{\delta_i\}} = \sum \frac{\partial \pi^e}{\partial \{\delta_i\}} - \{F_i\} = 0. \tag{1.41}$$

Pentru explicitarea condiției (1.41), se scrie întîi potențialul unui element finit. În acest scop, cu (1.6) și (1.12), energia de deformație ce se înmagazinează în volumul unui element finit rezultă succesiv :

$$W_d^e = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \{\tilde{u}\}^T [\mathfrak{D}]^T [D] [\mathfrak{D}] \{\tilde{u}\} dV, \tag{1.42}$$

iar lucrul mecanic de intensitate finală al forțelor exterioare de volum și de suprafață este

$$L^e = \int_V \{\tilde{u}\}^T \{\gamma\} dV + \int_V \{\tilde{u}\}^T \{p\} dA. \tag{1.43}$$

Rezultă astfel

$$\pi^e = \frac{1}{2} \int_V \{\tilde{u}\}^T [\mathfrak{D}]^T [D] [\mathfrak{D}] \{\tilde{u}\} dV - \int_V \{\tilde{u}\}^T \{\gamma\} dV -$$

$$- \{\tilde{u}\}^T \{p\} dA. \tag{1.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

În baza sumei din (1.40), minimizarea se poate efectua pentru fiecare element finit în parte, anulînd în acest scop prima variație a funcționalei (1.44), adică

$$\delta\pi=\Sigma\delta\pi^e=0, \tag{1.45}$$

unde

$$\delta\pi^e=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\pi^e}{\partial\{\delta_i\}}\delta\{\delta_i\}, \tag{1.46}$$

r fiind numărul nodurilor elementului finit. Întrucît variațiile $\delta(\delta_i)$ sînt independente, rezultă

$$\frac{\partial\pi^e}{\partial\{\delta_i\}}=0,\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r) \tag{1.47}$$

condiție care conduce la ecuația fundamentală a metodei. Astfel, pentru un element finit oarecare e, condițiile (1.47) scrise pentru un nod oarecare q sînt:

$$\left\{\frac{\partial\pi^e}{\partial\{\delta_q\}}\right\}=\{0\}=\int_V[B]_q^T[D]_q[B]_q\{u\}_q\mathrm{d}V-\int_V[N]_q^T\{\gamma\}_q\mathrm{d}V-$$

$$-\int_A[N]_q^T\{p\}_q\mathrm{d}A, \tag{1.48}$$

unde

$$[B]_q=[\mathfrak{D}][N]_q. \tag{1.49}$$

În cazul elementului finit triunghiular plan cu șase grade de libertate, cu definiția (1.49), se obține (1.21).

Cu (1.48), ecuația (1.41) reprezintă condiția de echilibru a nodului q, ceea ce matriceal se scrie:

$$[k]_q\{u\}_q=\{F\}_q. \tag{1.50}$$

Ținînd seama că elementul finit are r noduri, matricea de rigiditate completă a elementului va avea $mr\times mr$ elemente, m fiind numărul gradelor de libertate din nod. Deci

$$[k]^e=\begin{Bmatrix}[k]^1 & & 0\\ & [k]^2 & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 0 & & [k]^r\end{Bmatrix} \tag{1.51}$$

Aranjarea elementelor în matricea (1.51) necesită ordonarea elementelor din vectorul deplasărilor nodale sub forma

$$\{u\}^e = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix} \tag{1.52}$$

şi astfel ecuaţia fundamentală a metodei se scrie

$$[k]^e\{u\}^e = \{F\}^e, \tag{1.53}$$

identică cu (1.27), în care

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \{F\}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{F\}_r \end{Bmatrix}. \tag{1.54}$$

1.5. TIPURI DE ELEMENTE FINITE ŞI FUNCŢII DE INTERPOLARE

Una din problemele importante pe care inginerul de structuri trebuie să o aibă în vedere, atunci cînd apelează la metoda elementelor finite, este alegerea adecvată a tipului de element finit, Astfel, se va avea în vedere atît forma geometrică a acestuia, numărul şi tipul nodurilor salc, tipul variabilelor din nod, cît şi modul de aproximare a funcţiilor necunoscute din interiorul elementului finit, prin utilizarea funcţiilor de interpolare corespunzătoare. Aşa cum s-a arătat deja în paragraful 1.3 funcţiile care aproximează variabilele cîmpului nu pot fi alese arbitrar, ci trebuie să satisfacă condiţii legate pe de o parte de convergenţa soluţiei aproximate şi, pe de altă parte, de asigurarea continuităţii acesteia la interfeţele elementelor. Pentru a clasifica gradul de continuitate al variabilelor cîm-

Scanned with OKEN Scanner

pului la interfețele elementelor finite, se preconizează definiții și notații standard. Continuitatea este numită de clasa C^0, dacă este asigurată continuitatea funcției (funcțiile respective fiind numite *funcțiile generalizate ale lui Lagrange*), de clasa $C^1 \ldots C^n$, dacă este asigurată și continuitatea derivatelor de ordinul întîi, respectiv superior (funcțiile respective fiind numite *funcțiile generalizate ale lui Hermite*). Cu aceste definiții, condițiile pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile de interpolare presupuse avînd $(k+1)$ derivate, în ipoteza că prin micșorarea dimensiunii elementului finit se asigură convergența, pot fi grupate în :

a) condiții de *compatibilitate*, care reclamă continuitate de clasa C^k la interfețe, și

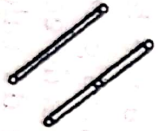
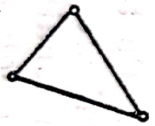
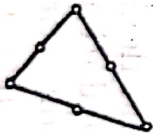
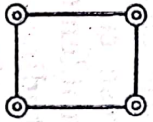
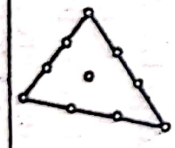
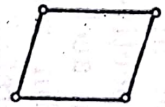
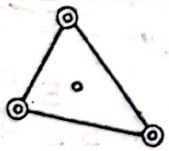
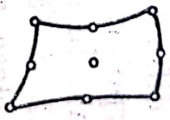
b) condiții de *completitudine*, care reclamă continuitate de clasa C^{k+1}.

Din punctul de vedere al acestor condiții, se poate menționa aici că dificultățile în alcătuirea elementelor finite și a funcțiilor de interpolare respective cresc cu clasa de continuitate a acestora din urmă. În cazul acelor probleme la care clasa de continuitate C^0 este suficientă, din multitudinea de elemente finite aparținînd acestei clase se preferă tipurile cele mai simple, pentru a reduce volumul de calcul [7].

În ceea ce privește geometria elementelor finite, aceasta prezintă de cele mai multe ori forme simple. Tabelul 1.1 și 1.2 ilustrează o serie de elemente finite liniare, de suprafață și spațiale utilizate în analiza structurilor. În tabelul 1.1 s-au înserat elemente *liniare* (Nr. 1), *plane* încărcate în planul lor (Nr. 2...12) *spațiale* (Nr. 12...19) și plane încărcate normal pe planul lor (Nr. 20...26), iar în tabelul 1.2 cîteva elemente finite *curbe* cu dublă curbură. Se disting nodurile așezate în colțurile, respective pe marginile (laturile respectiv suprafețele) elementelor, numite noduri *exterioare*, în dreptul cărora se asigură conexiunea cu elementele vecine. Unele elemente au și noduri plasate în interiorul lor, numite noduri *interioare*. Acestea devin necesare atunci cînd numărul coordonatelor generalizate depășește numărul gradelor de libertate ale elementului finit. În acest mod, matricea de rigiditate poate fi îmbunătățită, făcînd-o mai rigidă sau dimpotrivă mai flexibilă. Cu toate acestea, utilizarea unui număr mai mare de noduri interioare nu este recomandată, întrucît nu se obține o îmbunătățire a condițiilor de echilibru între elemente, în schimb crește substanțial volumul de calcul. În tabel se precizează variabilele nodale considerate (tipul gradului de libertate) și numărul acestora. În dreptul nodurilor însemnate cu

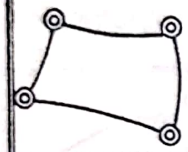
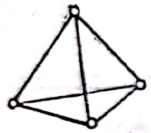
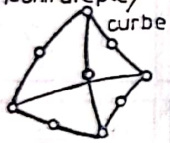
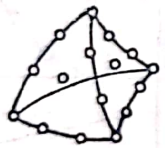
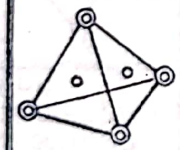
Scanned with OKEN Scanner

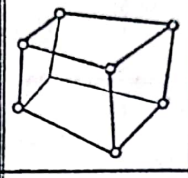
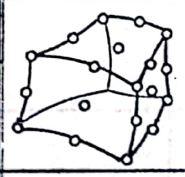
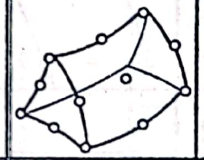
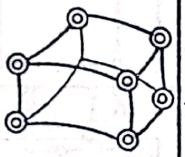
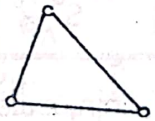
Tabelul 1.1.

Nr crt	Geometria elementului finit	Grade de libertate nodale: Tip	Grade de libertate nodale: Număr	Cîmpul de deplasări	Nr crt	Geometria elementului finit	Grade de libertate nodale: Tip	Grade de libertate nodale: Număr	Cîmpul de deplasări
1		u v (w)	4 / 6	Liniar / De gradul 2	6		u v	12	Polinom de gr. 2 complet, în coordonate curbilinii
2		u v	6	Polinom liniar complet	7		u v	8	Liniar
3		u v	12	Polinom de gr. 2 complet	8		u v $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$	32	Polinom de gr. 6 incomplet (Interp. Hermite)
4		u v	20 / 18	Polinom de gr. 3 complet	9		u v	8	Liniar în coordonate oblice
5		u v $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial y}$	20 / 18	Polinom de gr. 3 complet	10		u v	16 / 18	Polinom de gr. 4 incomplet în coordonate curbilinii (Interp. Lagrange)

Scanned with OKEN Scanner

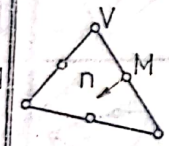
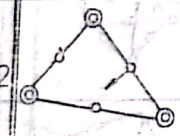
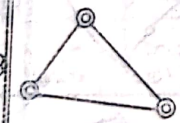
Tabelul 1.1 (continuare)

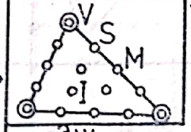
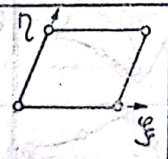
Nr. crt	Geometria elementului finit.	Grade de libertate nodale — Tip	Grade de libertate nodale — Număr	Cîmpul de deplasări
11		$u \quad v$ $\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial y}{\partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$	32	Polinom de gr. 6 incomplet în coordonate curbilinii (Interp. Hermite)
12		$u \quad v \quad w$	12	Polinom liniar complet
13		$u \quad v \quad w$	30	Polinom de gr. 2 complet în coordonate carteziene/curbil.
14		$u \quad v \quad w$	60	Polinom de gr. 3 complet în coordonate curbilinii.
15		$u \quad v \quad w$ $\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z}$ $\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z}$ $\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$	60 / 48	Polinom de gr. 3 complet

Nr. crt	Geometria elementului finit.	Grade de libertate nodale — Tip	Grade de libertate nodale — Număr	Cîmpul de deplasări
16		$u \quad v \quad w$	24	Polinom de gr. 3 incomplet în coordonate oblice
17		$u \quad v \quad w$	81 / 60	Polinom de gr. 6 incomplet în coordonate curbilinii (Interp. Lagrange)
18		$u \quad v \quad w$	64	Polinom de gr. 6 incomplet în coordonate curbilinii (Interp. Lagrange)
19		$u \quad v \quad w$ $\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z}$ $\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z}$ $\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$	96	Polinom de gr. 6 incomplet în coordonate curbilinii (Interp. Hermite)
20		$w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y}$	9	Polinom de gr. 3 complet

Scanned with OKEN Scanner

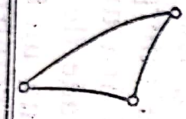
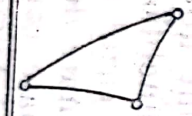
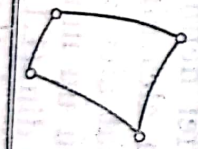
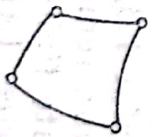
Tabelul 1.1 (continuare)

Nr. crt.	Geometria elementului finit	Grade de libertate nodale: Tip	Grade de libertate nodale: Număr	Cîmpul de deplasări
21		V: w $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}$ M: w $\frac{\partial w}{\partial n}$	15	Polinom de gr. 4 cu 3 termeni suplimentari.
22		V: w $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ M: $\frac{\partial w}{\partial n}$	21	Polinom de gr. 5 complet.
23		w $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	18	Polinom de gr. 5 incomplet.

Nr. crt.	Geometria elementului finit	Grade de libertate nodale: Tip	Grade de libertate nodale: Număr	Cîmpul de deplasări
24	 M: $\frac{\partial w}{\partial n}$ I: w	V: w $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ S: $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}$	35	Polinom de gr 7 complet
25		w $\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	16	Polinom de gr. 6 incomplet.
26		w $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$	16	Polinom de gr. 6 în coordonate oblice.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1.

Nr crt	Geometria elementului finit	Grade de libertate nodale		Interpolarea geometrică	Cîmpul de deplasări	Ipoteza de calcul
		Tip	Număr			
1		u_ξ u_η w α β	15	Polinom de gr. 2 ptr. cote, deasupra elementului triungh. plan.	Liniar ptr. u_ξ u_η w α β	Teoria plăcilor curbe pleoștite (Marguerre), cu considerarea contract transv.
2		u_ξ u_η w $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ $\frac{\partial w}{\partial \eta}$	15	Polinom de gr. 2 ptr. cote, deasupra elementului triungh. plan.	Liniar ptr. u_ξ u_η Polinom de gr 3 ptr. w, incomplet.	Teoria plăcilor curbe pleoștite (Novozhilov)
3		u_ξ u_η w α β	16	Descriere exactă a geometriei	Liniar ptr. u_ξ u_η w α β	Teoria Kirchhoff cu considerarea contr. transv
4		u_ξ u_η w α β $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$	$\frac{32}{28}$	Interpolare Hermite în direct. meridian (în cazul supr. de rotație)	Liniar ptr. u_ξ u_η α β Polinom de gr. 3 ptr. w.	Teoria Wazhizu cu considerarea contr. transv

ξ, η : direcții de coordonate în suprafața plăcii curbe.

Scanned with OKEN Scanner

două cerculeţe concentrice, sînt considerate ca variabile nodale, pe lîngă funcţiile ca atare şi derivatele acestora [2].

Pentru exprimarea cîmpului de deplasări, se utilizează de preferinţă dezvoltări polinomiale. Alegerea ordinului acestora se face luînd în considerare condiţiile de compatibilitate şi completitudine care se cer satisfăcute, urmărind totodată ca dezvoltarea polinomială respectivă să rămînă independentă de orientarea sistemului local de coordonate, adică să prezinte o aşa-numită izotropie geometrică. Polinoamele conţinînd o singură variabilă, de forma

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{T_n^{(1)}} \alpha_i x^i \tag{1.55}$$

cu $T_n^{(1)}=n+1$ termeni, posedă prin definiţie această proprietate indiferent de numărul termenilor. În cazul polinoamelor cu două sau trei variabile, complete, de forma :

$$P_n(x, y)=\sum_{k=1}^{T_n^{(2)}} \alpha_k x^i y^j,\ i+j\leqslant n, \tag{1.56}$$

cu $T_n^{(2)}=(n+1)(n+2)/2$ termeni, respectiv

$$P_n(x,y,z)=\sum_{l=1}^{T_n^{(3)}} \alpha_l x^i y^j z^k,\ i+j+k\leqslant n, \tag{1.57}$$

cu $T_n^{(3)}=(n+1)\ (n+2)\ (n+3)/6$ termeni, condiţia este de asemenea satisfăcută. În cazul polinoamelor incomplete (trunchiate), izotropia geometrică se realizează prin considerarea termenilor „simetrici". Astfel, în cazul polinoamelor (1.56), avînd termenii aşezaţi ca în figura 1.7, considerarea unui termen din partea stîngă a axei de simetrie obligă la considerarea termenului simetric acestuia din dreapta axei.

Polinoamele astfel definite sînt utilizate, aşa cum s-a arătat în paragraful 1.3, la alcătuirea funcţiilor de interpolare N (1.11). Trebuie însă remarcat aici că, în cazul utilizării unui număr mare de elemente finite cu un număr mare de grade de libertate, stabilirea matricei $[A]^{-1}$ din (1.11) poate consuma un timp îndelungat, costul unui asemenea calcul putînd deveni prohibitiv. De asemenea, pot exista situaţii cînd inversarea matricei $[A]$ nu poate fi efectuată.

Scanned with OKEN Scanner

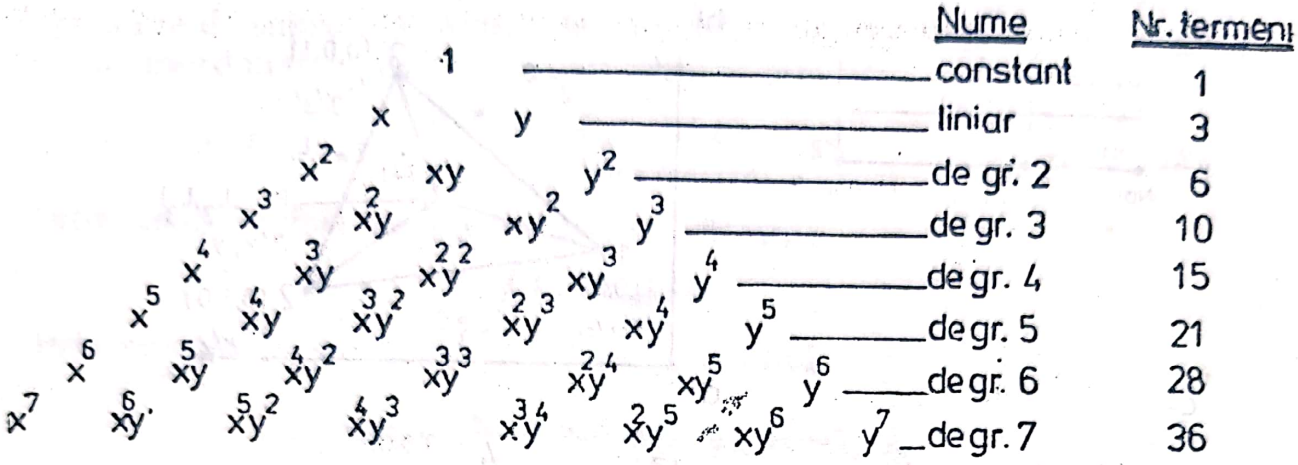


Fig. 1.7.

Din acest motiv, stabilirea funcţiilor de interpolare se face fie direct, prin utilizarea polinoamelor de interpolare clasice, fie utilizînd în acest scop un sistem local de axe de coordonate, numit sistem *natural* [7]. Un asemenea sistem de coordonate permite definirea coordonatelor unui punct din interiorul elementului, în funcţie de un set de parametrii adimensionali, ai căror valoare nu depăşeşte unitatea. Uzual, sistemul natural de coordonate se alege în aşa fel ca în dreptul nodurilor exterioare unele coordonate naturale să devină unitare. În figura 1.8 sînt prezentate sistemele naturale de coordonate pentru elemente finite liniare, de suprafaţă şi spaţiale. În cazul unui element finit liniar (fig. 1.8 a), relaţia între coordonatele naturale L_1 şi L_2 ale unui punct curent şi coordonata carteziană a acestuia este:

$$x=L_1x_1+L_2x_2, \tag{1.58}$$

unde L_1 şi L_2 pot fi interpretate ca funcţii ce ponderează coordonatele unui punct faţă de coordonatele punctelor extreme şi între care există relaţia evidentă

$$L_1+L_2=1. \tag{1.59}$$

Rezolvînd sistemul (1.58-59) rezultă

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};\ L_2(x)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}, \tag{1.60}$$

care pot fi interpretate ca funcţii de interpolare liniare ale variabilei u a cîmpului, adică

$$u_{(x)}=u_1L_1+u_2L_2. \tag{1.61}$$

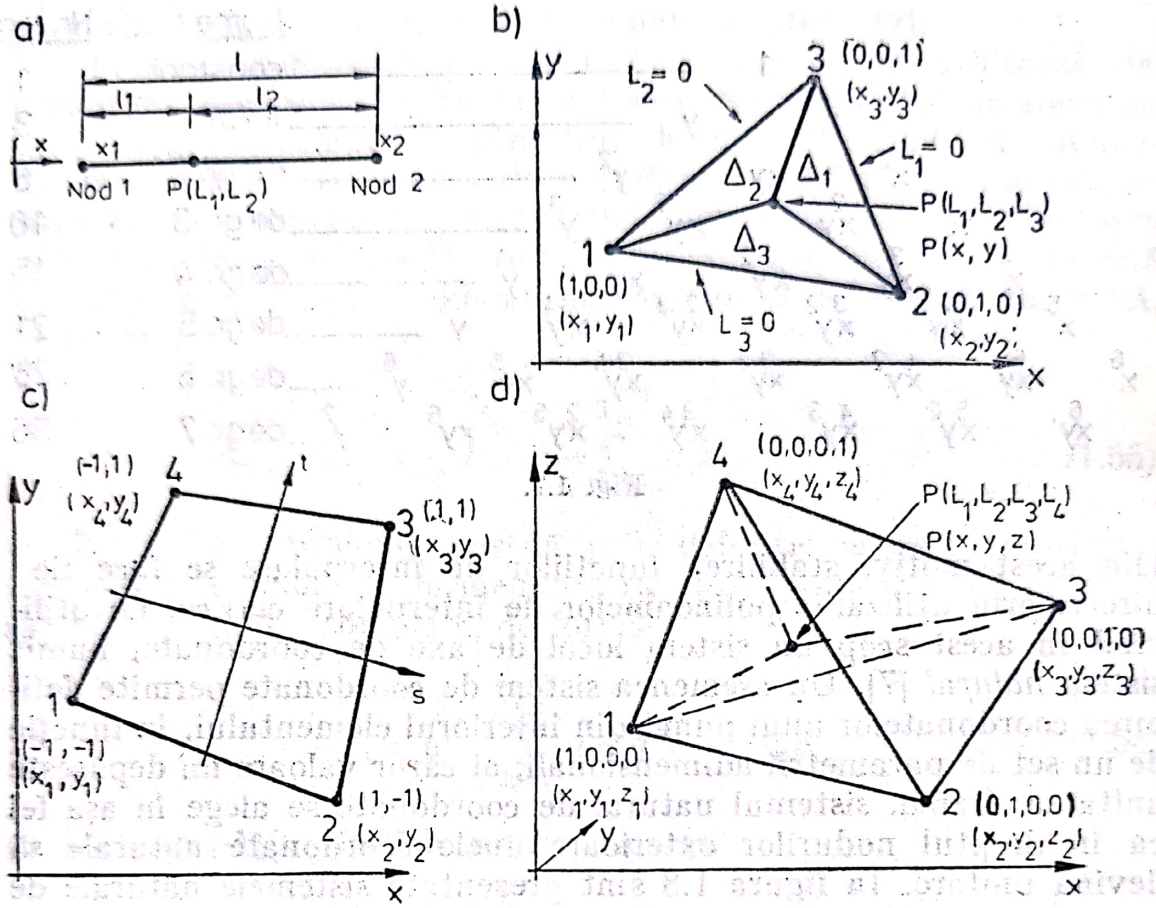


Fig. 1.8.

În baza relației (1.61), rezultă regula de diferențiere

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x}, \tag{1.62}$$

unde

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{1}{x_2 - x_1}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{-1}{x_2 - x_1}. \tag{1.63}$$

Integrările efectuate pe lungimea elementului se simplifică avînd în vedere că există relația

$$\int_{x_i}^{x_j} L_1^{\alpha} L_2^{\beta} dx = \frac{\alpha!\beta!(x_2 - x_1)}{(\alpha+\beta+1)!}, \tag{1.64}$$

α și β fiind numere întregi.

Scanned with OKEN Scanner

În mod cu totul asemănător se procedează și în cazul elementelor finite de suprafață. Astfel, în cazul elementului finit triunghiular plan, coordonatele carteziene ale unui punct sînt

$$\begin{aligned} x&=L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3\\ y&=L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3, \end{aligned} \tag{1.65}$$

între coordonatele naturale existînd relația:

$$L_1+L_2+L_3=1.$$

Prin rezolvarea sistemului (1.65—66), rezultă

$$L_i\,(x,\ y)=\frac{1}{2\,\Delta}(a_i+b_ix+c_iy),\ (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.67}$$

unde $2\,\Delta$ se obține cu (1.17), iar a_i, b_i, c_i cu (1.18). Coordonatele naturale L pot fi definite și ca rapoarte ale ariilor triunghiulare interioare, către aria elementului finit, adică

$$L_1=\Delta_1/\Delta,\ L_2=\Delta_2/\Delta,\ L_3=\Delta_3/\Delta.$$

Se constată cu ușurință că expresiile (1.67) sînt chiar funcțiile de interpolare din (1.19). Și de această dată, determinarea matricei de rigiditate se face mai ușor în baza relației:

$$\int_A L_1^{\alpha}\,L_2^{\beta}\,L_3^{\gamma}\ \mathrm{d}A=\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}\,2\Delta. \tag{1.68}$$

În cazul elementului finit tetraedral (fig. 1.8d) se obțin relații asemănătoare, coordonatele naturale putînd fi privite ca rapoarte ale volumurilor parțiale, către volumul elementului, adică:

$$L_i=V_i/V,\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Dintre polinoamele de interpolare clasice, se folosește frecvent polinomul de tip Lagrange, definit sub forma

$$L_k\,(x)=\prod_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{n}\frac{x-x_n}{x_k-x_n}, \tag{1.69}$$

avînd proprietatea că pentru $x=x_k$ rezultă $L_k\,(x_k)=1$, în timp ce pentru $x=x_m$ și $m\neq k$ polinomul se anulează. În baza acestei proprietăți, o funcție oarecare $u\,(x)$ poate fi aproximată prin expresia

$$u\,(x)\simeq\tilde{u}\,(x)=\sum_{i=0}^{n}u_iL_i\,(x)=[L]\{u\}, \tag{1.70}$$

Scanned with OKEN Scanner

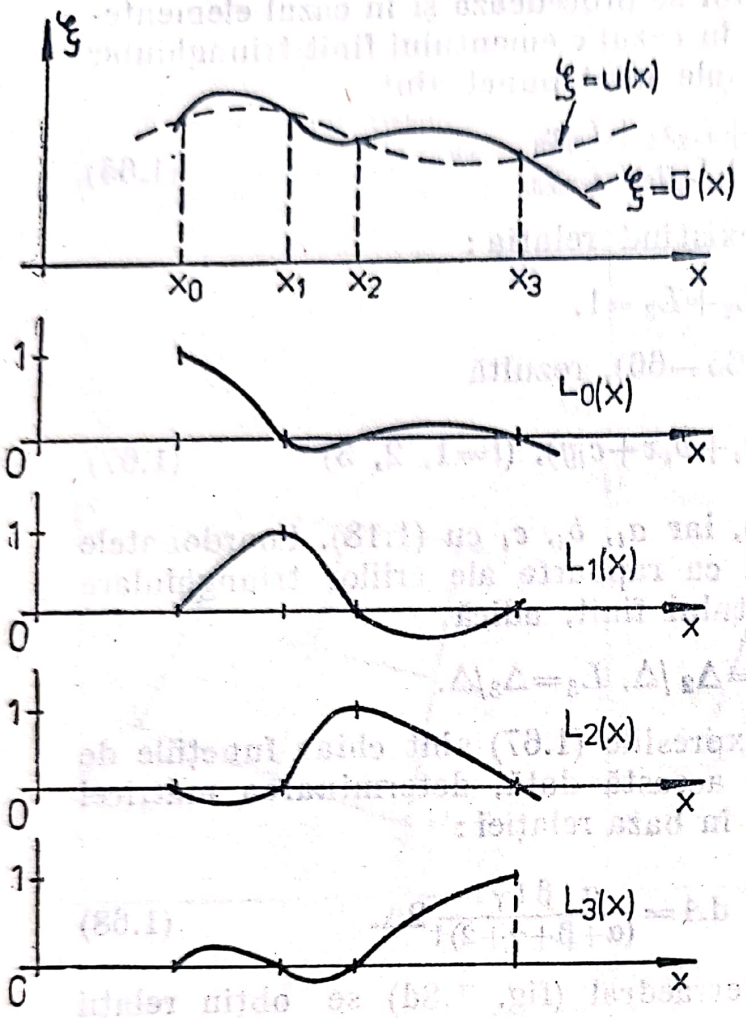


Fig. 1.9.

unde : $u_i = u_{(xi)}$, $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ sînt valorile funcției în punctele de abscisă x_i. În figura 1.9 este ilustrată aproximarea unei funcții $\Phi_{(x)}$ cu un polinom de gradul trei.

Întrucît coeficienții Lagrange îndeplinesc proprietățile funcțiilor de interpolare, rezultă că în problemele de clasă de continuitate C°

$$N_i(x) = L_i(x),$$

ordinul polinomului fiind determinat de numărul nodurilor atașate elementului finit liniar respectiv.

În cazul elementelor finite plane rectangulare, avînd marginile paralele cu sistemul global de axe de coordonate, funcțiile de interpolare se pot obține ușor prin utilizarea polinoamelor de interpolare Lagrange, formînd produse ale acestora. Astfel, în cazul elementului finit dreptunghiular din figura 1.10, utilizînd sistemul local ξ, η, variabila cîmpului u se poate scrie sub forma

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta)\, u_i, \tag{1.71}$$

unde :

$$N_i(\xi, \eta) = L_i(\xi), L_i(\eta), \quad (i=1, \ldots, 4) \tag{1.72}$$

L_i fiind polinoamele Lagrange definite prin (1.69). Explicit, cu (1.69), se poate scrie

$$N_1(\xi, \eta) = L_1(\xi) L_1(\eta) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{\eta - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4};$$

Scanned with OKEN Scanner

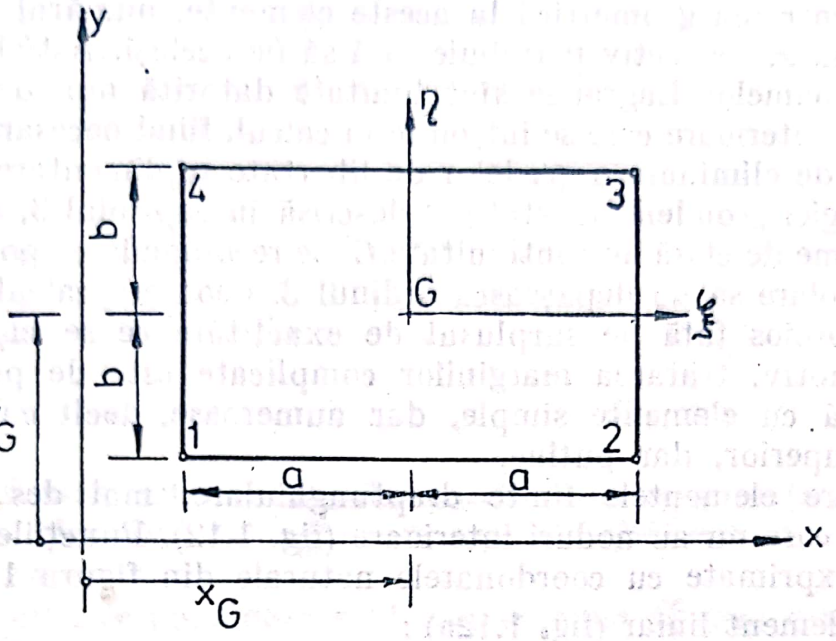


Fig. 1.10.

$$N_2(\xi,\ \eta)=L_2(\xi)\,L_2(\eta)=\frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\cdot\frac{\eta-\eta_3}{\eta_2-\eta_4};$$

$$N_3(\xi,\ \eta)=L_3(\xi)\,L_3(\eta)=\frac{\xi-\xi_3}{\xi_3-\xi_4}\cdot\frac{\eta-\eta_3}{\eta_3-\eta_2};$$

$$N_4(\xi,\ \eta)=L_4(\xi)\,L_4(\eta)=\frac{\xi-\xi_4}{\xi_4-\xi_3}\cdot\frac{\eta-\eta_4}{\eta_4-\eta_1}; \qquad (1.72')$$

unde :

$$\xi=\frac{x-x_G}{a};\quad \eta=\frac{y-y_G}{b}$$

sînt coordonatele adimensionale folosite.

Generalizînd relaţia (1.71) la :

$$u(\xi,\ \eta)=\sum_{k=1}^{n} L_k(\xi)\,L_k(\eta)u_k, \qquad (1.71')$$

n fiind numărul de noduri care se ataşează elementului finit, se pot formula pe această cale, funcţiile de interpolare pentru elemente finite de ordin superior, de tipul acelora din fig. 1.11. Pentru a

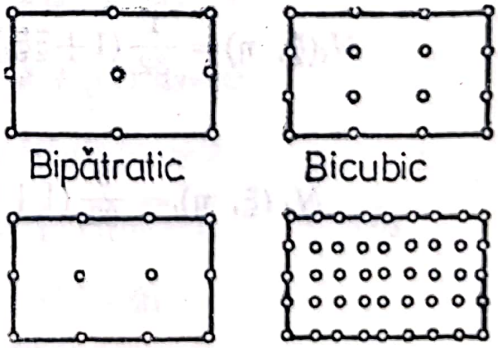


Fig. 1.11.

asigura izotropia geometrică la aceste elemente, numărul nodurilor pe direcţia x, respectiv y trebuie însă să fie acelaşi. Astfel, avantajele polinoamelor Lagrange sînt limitate datorită numărului mare de noduri interioare care se introduc în calcul, fiind necesare operaţii auxiliare de eliminare a gradelor de libertate suplimentare, în baza metodologiei „condensării statice" descrisă în capitolul 3. De aceea, în probleme de clasă de continuitate C^0 se recomandă ca polinoamele de interpolare să nu depăşească ordinul 3, deoarece calculul devine prea laboroios faţă de surplusul de exactitate ce se cîştigă. Din acelaşi motiv, tratarea marginilor complicate este de preferat să fie făcută cu elemente simple, dar numeroase, decît cu elemente de tip superior, dar puţine.

Dintre elementele finite dreptunghiulare, mai des utilizate, sînt cele care nu au noduri interioare (fig. 1.12). Funcţiile de interpolare, exprimate cu coordonatele naturale din figura 1.10, sînt:

1. Element liniar (fig. 1.12a):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i), \tag{1.73}$$

2. Element de gradul 2 (fig. 1.12 b):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1), \text{ pentru nodurile } \xi=\pm 1, \ \eta=\pm 1$$

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i), \text{ pentru nodurile } \xi=0, \ \eta=\pm 1$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2), \text{ pentru nodurile } \xi=\pm 1, \eta=0 \tag{1.74}$$

3. Element de gradul 3 (fig. 1.12 c):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)9\,[(\xi^2+\eta^2)-10] \text{ pentru nodurile } \xi=\pm 1, \ \eta=\pm 1 \tag{1.75}$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+9\eta\eta_i), \text{ pentru nodurile } \xi=\pm 1, \ \eta=\pm\frac{1}{3}$$

şi similar pentru nodurile de pe celelalte laturi.

Scanned with OKEN Scanner

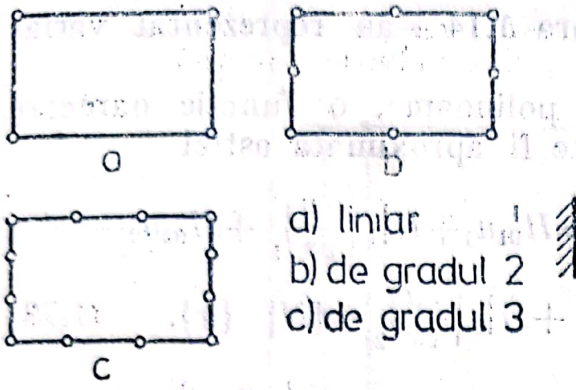


Fig. 1.12.

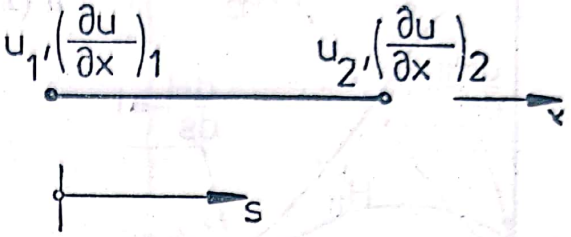


Fig. 1.13.

În cazul marginilor curbe, elementele finite dreptunghiulare se combină cu elemente triunghiulare sau se utilizează elementele patrulatere oarecare.

Atunci cînd se abordează probleme de clasă C^1 (sau mai mare) de continuitate, construirea funcțiilor de interpolare se face cu ajutorul polinoamelor Hermite. Un polinom Hermite de ordinul n, în necunoscuta x, notat $H^n_{(x)}$, este un polinom de gradul $2n+1$, avînd proprietatea că atît polinomul cît și derivatele acestuia pînă la ordinul n iau valoarea 1 sau 0 în punctele extreme ale intervalului de definiție. Se folosește curent notația $H^n_{mi}(x)$, indicele m indicînd ordinul derivatei, iar indicele i nodul 1 sau 2 de la extremitatea intervalului.

Pentru a exemplifica aplicarea polinioamelor Hermite în construirea funcțiilor de interpolare, se consideră un elcment finit liniar cu patru grade de libertate (fig. 1.13), pentru care se utilizează polinoame Hermite de ordinul $n=1$. Introducînd variabila $s=(x-x_1)/(x_2-x_1)$, pentru intervalul $0 \leqslant s \leqslant 1$, polinoamele care satisfac condițiile :

$$H^1_{01}(0)=1\ ;\ H^1_{11}(0)=0\ ;\ dH^1_{01}(0)/ds=0\ ;\ dH^1_{11}(0)/ds=1$$

$$H^1_{10}(1)=0\ ;\ H^1_{11}(1)=0\ ;\ dH^1_{01}(1)/ds=0\ ;\ dH^1_{11}(1)/ds=0$$

$$H^1_{02}(0)=0\ ;\ H^1_{12}(0)=0\ ;\ dH^1_{02}(0)/ds=0\ ;\ dH^1_{12}(0)/ds=0$$

$$H^1_{02}(1)=1\ ;\ H^1_{12}(1)=0\ ;\ dH^1_{02}(1)/ds=0;\ dH^1_{12}(1)/ds=1, \qquad (1,76)$$

au expresiile $H^1_{11}(s)=1-3s^2+2s^3\ ;\ H^1_{02}(s)=s^2(3-2s)$

$$H^1_{11}(s)=(x_2-x_1)s(s-1)^2\ ;\ H^1_{12}(s)=(x_2-x_1)s^2(s-1), \qquad (1.77)$$

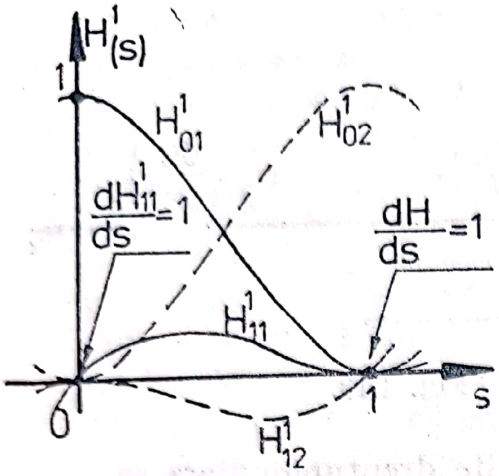


Fig. 1.14.

iar în figura 1.14 s-au reprezentat variațiile lor.

Cu aceste polinoame, o funcție oarecare $u(x)$ poate fi aproximată astfel

$$u_{(x)}=H^1_{01}u_1+H^1_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1+H_{02}u_2+$$

$$+H^1_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2=[N]\ \{u\}, \qquad (1.78)$$

unde s-a notat cu : $\{u\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 \\ u_2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 \end{Bmatrix}$ (1.79)

și cu $[N]=[H^1_{01},\ H^1_{11},\ H^1_{02},\ H^1_{12}]$ (1.80)

funcția de interpolare căutată, care asigură în dreptul nodurilor extreme, continuitatea funcției și a derivatei acesteia.

În cazul elementelor finite de suprafață, funcțiile de interpolare, care să răspundă la condițiile de continuitate de clasa C^1, se obțin mai dificil. Astfel, în cazul elementului finit patrulater oarecare, asigurarea continuității de clasa C^1 în lungul marginilor (continuitatea variabilei cîmpului u și a derivatei acesteia $\partial u/\partial n$ pe direcția normalei la margine) necesită considerarea următoarelor șase valori nodale :

$u,\ \partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y,\ \partial^2 u/\partial x\partial y,\ \partial^2 u/\partial x^2,\ \partial^2 u/\partial y^2$. Pentru elementul dreptunghiular, avînd laturile paralele cu sistemul general de axe, sînt suficiente numai patru valori nodale : $u,\ \partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y$ și $\partial^2 u/\partial x\partial y$, acesta fiind cel mai simplu element finit din clasa de continuitate C^1, cu 16 grade de libertate (fig. 1.15). Astfel, fiind necesar un polinom de gradul 5, avînd 21 termeni, cu eliminarea a cinci termeni, se poate scrie

$$u(x,\ y)=\underset{1\times 16}{\{\Phi\}^T}\ \underset{16\times 1}{\{\alpha\}}. \qquad (1.81)$$

Utilizînd (1.81) în evaluarea variabilelor nodale din nodurile elementului finit, rezultă

$$\{u\}=\underset{16\times 16}{[A]}\ \{\alpha\}. \qquad (1.82)$$

Scanned with OKEN Scanner

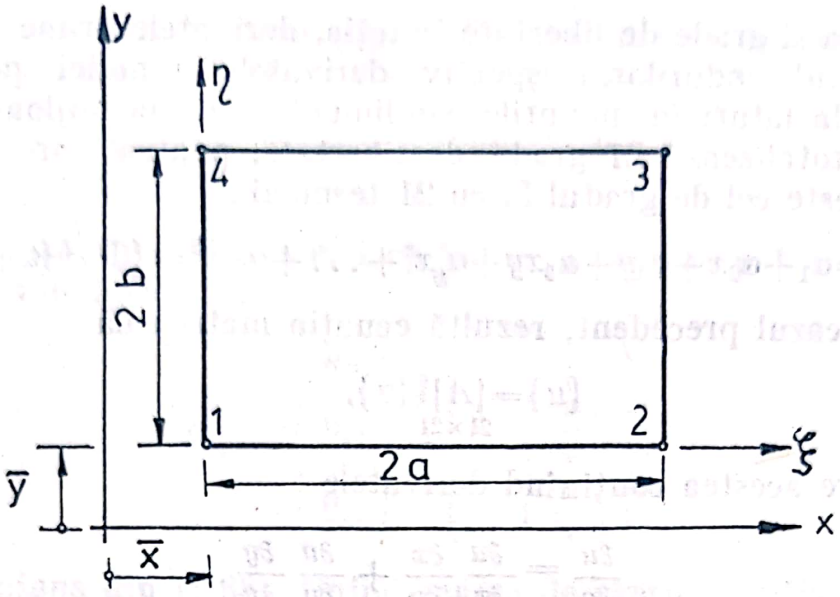


Fig. 1.15.

Dificultatea provenită ca urmare a posibilității inexistenței $[A]_e^{-1}$, necesară la construirea funcțiilor de interpolare, poate fi ocolită prin utilizarea produselor de polinoame Hermite, sub forma

$$u(\xi,\ \eta)=\sum_{j=1}^{4}\left[\ {}_1N_j . u_j+{}_2N_j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j+{}_3N_j\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j+{}_4N_j\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_j\ \right], \tag{1.83}$$

unde :

$$\begin{aligned}
{}_1N_j\ (\xi,\ \eta)&=H^1_{0j}(\xi)\ H^1_{0j}(\eta)\\
{}_2N_j\ (\xi,\ \eta)&=H^1_{0j}(\xi)\ H^1_{1j}(\eta)\\
{}_3N_j\ (\xi,\ \eta)&=H^1_{1j}(\xi)\ H^1_{0j}(\eta)\\
{}_4N_j\ (\xi_I\ \eta)&=H^1_{1j}(\xi)\ H^1_{1j}(\eta),
\end{aligned} \tag{1.84}$$

unde

$$\xi=\frac{x-\bar{x}}{2a}\quad \text{și}\quad \eta=\frac{y-\bar{y}}{2b}$$

sînt coordonatele adimensionale folosite.

În cazul unui element finit triunghiular plan (fig. 1.16),

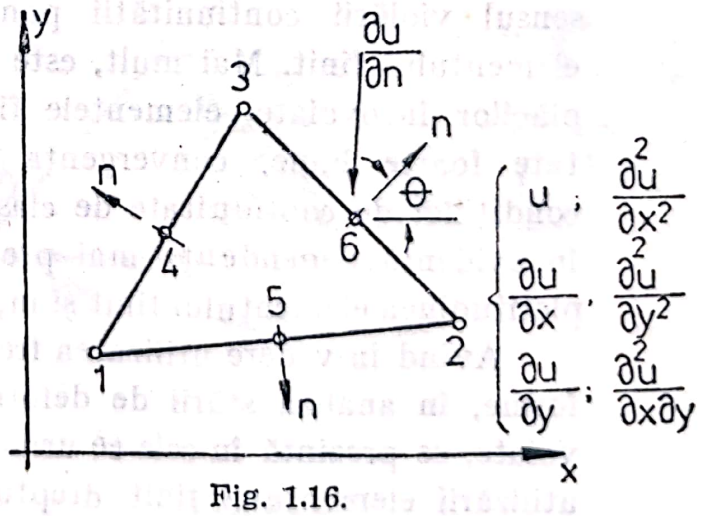


Fig. 1.16.

alegînd ca și grade de libertate funcția, derivatele prime și secunde din dreptul nodurilor, respectiv derivatele funcției pe direcția normală la laturi în nodurile suplimentare de la mijloacele acestora, se totalizează 21 grade de libertate, pentru care polinomul adecvat este cel de gradul 5, cu 21 termeni :

$$u(x, y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy+\alpha_5 x^2+\ldots+\alpha_{21} y^5=\{\Phi\}^T\{\alpha\eta\}. \quad (1.85)$$

Ca și în cazul precedent, rezultă ecuația matriceală

$$\{u\}=\underset{21\times 21}{[A]}\{\alpha\}, \quad (1.86)$$

trei dintre acestea conținînd derivatele

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n},$$

unde

$$\frac{\partial x}{\partial n}=-\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial n}=\cos\theta,$$

θ fiind unghiul format între vectorul normalei și axa x. Întrucît $[A]^{-1}$ se obține numeric, funcțiile de interpolare nu se scriu explicit.

Este necesar de subliniat faptul că uneori continuitatea derivatelor secunde în dreptul nodurilor nu poate fi asigurată din considerente fizice ; astfel, în cazul plăcilor încovoiate la care proprietățile fizice pot prezenta o variație bruscă de la un element finit la altul, se lezează continuitatea momentelor. În asemenea situații este firesc să se renunțe la condițiile de conformabilitate, în sensul violării continuității pantei $\partial u/\partial n$ în lungul marginilor elementului finit. Mai mult, este deja stabilit faptul că, în analiza plăcilor încovoiate, elementele finite *neconforme* conduc la rezultate foarte bune, convergența fiind asigurată fără respectarea condițiilor de continuitate de clasa C^1. Calcule comparative au pus în evidență dependența mai pronunțată a convergenței, de completitudinea elementului finit și mai puțin de conformitatea acestuia.

Avînd în vedere utilizarea frecventă a elementelor finite neconforme, în analiza stării de deformație și tensiune a plăcilor încovoiate, se prezintă în cele ce urmează elementele de calcul necesare utilizării elementului finit dreptunghiular neconform [14]. Pentru

un asemenea element finit (fig. 1.17), cîmpul de deplasări este ales sub forma unui polinom de gradul 4 incomplet, adică

$$w=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 x^2+\alpha_5 xy+\alpha_6 y^2+\alpha_7 x^3+\alpha_8 x^2 y+ \\ +\alpha_9 xy^2+\alpha_{10} y^3+\alpha_{11} x^3 y+\alpha_{12} xy^3, \tag{1.87}$$

avînd 12 grade de libertate, Deplasările nodale se pot scrie, pentru nodul i, sub forma:

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}, \tag{1.88}$$

semnul minus din (1.88), ţinînd seama de sensul pozitiv al rotaţiei θ_{xi} (fig. 1.17). Se remarcă variaţia parabolică a pantelor la suprafaţa medie deformată, pe direcţii perpendiculare pe direcţia definirii acestor pante (de exemplu, variaţia pantei $\frac{\partial w}{\partial x}$ pe direcţia $x=$constant). Definirea numerică a acestor variaţii, doar prin valorile nodale ale pantelor. atrage după sine caracterul neconform al cîmpului de deplasări (1.87).

Constantele $\alpha_1 \ldots \alpha_{12}$ se obţin prin explicitarea mai întîi în (1.88) a termenilor vectorului, pentru cele patru noduri, adică

$$\{u\}=[A]\ \{\alpha\} \tag{1.89}$$

şi apoi prin inversarea:

$$\{\alpha\}=[A]^{-1}\ \ \{u\}. \tag{1.90}$$

Operaţiile de calcul decurg similar cu cele descrise în paragraful 1.3. Astfel, cu notaţiile deja utilizate pînă aici, cîmpul de deplasări din interiorul unui element finit poate fi scris sub forma (1.7′), unde

$$[N]=[N_i,\ N_j,\ N_\ell,\ N_k] \tag{1.91}$$

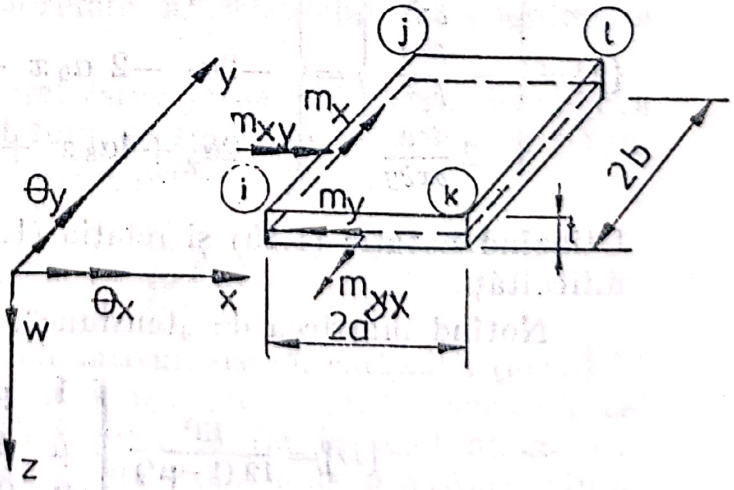


Fig. 1.17.

Scanned with OKEN Scanner

și

$$N_i = X_1 Y_1 \{2(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) - 4X_1 X_2 - 4Y_1 Y_2 ;\ 4bY_1 Y_2 ;\ -4aX_1 X_2\}$$

$$N_j = X_1 Y_2 \{2(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + 4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2 ;\ +4bY_1 Y_2 ;\ +4aX_1 X_2\}$$

$$N = X_2 Y_2 \{2(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) - 4X_1 X_2 - 4Y_1 Y_2 ;\ -4bY_1 Y_2 ;\ +4aX_1 X_2\}$$

$$N_k = X_2 Y_1 \{2(X_2 Y_1 - X_1 Y_2) + 4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2 ;\ -4bY_1 Y_2 ;\ -4aX_1 X_2\}, \tag{1.92}$$

iar

$$X_1 = (x-a)/a ; \qquad Y_1 = (y-b)/b$$

$$X_2 = (x+a)/a \qquad Y_2 = (y+b)/b. \tag{1.93}$$

Relațiile între solicitările unitare și deformația suprafeței mediane a plăcii este

$$\{\sigma\} = \{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\ \{\varepsilon\}, \tag{1.94}$$

iar vectorul deformațiilor specifice, necesar la calculul acestor solicitări unitare, se scrie în funcție de deplasările nodale sub forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\alpha_4 & -6\alpha_7 x & -2\alpha_8 y & -6\alpha_{11} xy \\ -2\alpha_6 & -2\ \alpha_9 x & -6\,\alpha_{10} y & -6\ \alpha_{12} xy \\ 2\alpha_5 & +4\alpha_8 x & +4\alpha_9 y & +6\alpha_{11} x^2 \ +6\alpha_{12} y^2, \end{Bmatrix} \tag{1.95}$$

Utilizînd notația (1.15) și relația (1.14'), matricea $[B]$ rezultă fără dificultăți.

Notînd matricea de „tensiune", în cazul plăcilor izotrope, cu:

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}, \tag{1.96}$$

matricea de rigiditate rezultă în baza relației

$$[k]=\int\int[B]^T[D]\ [B]\ dxdy, \tag{1.97}$$

avînd în vedere că (1.96) este corelat cu solicitările unitare $\{m\}$. În cazul unor grosimi de placă t constante, (1.97) se exprimă mai simplu astfel

$$[k]=\{[A]^{-1}\}^T\left(\int\int\ [M]^T\,[D][M]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)[A]^{-1}, \tag{1.97'}$$

integralele putîndu-se efectua cu ușurință.

În ceea ce privește vectorul acțiunilor nodale, acestea se definesc conform (1.25).

În situațiile cînd pentru calculul unor structuri de rezistență se folosesc elemente finite tridimensionale cu muchii drepte, prezența în structură a unor margini curbe poate conduce, în cadrul discretizării, la un număr însemnat de mare de asemenea elemente. Avînd în vedere și numărul mare de grade de libertate al acestora, pot interveni dificultăți legate de posibilitatea de memorare în calculator a informațiilor de calcul. Acest neajuns poate fi evitat prin utilizarea unor elemente finite cu margini curbe, obținîndu-se o importantă reducere a numărului acestora.

Ideea de bază este aceea de a transforma forma geometrică simplă a unui element finit, avînd marginile drepte și paralele cu sistemul de referință local de coordonate carteziene, într-o formă geometrică cu margini curbe (în particular drepte inclinate), raportată la sistemul global (sau local) de referință. În figura 1.18 este ilustrată această operație, în cazul unui element plan, respectiv spațial, rezultînd și o transformare a sistemului de coordonate locale [7, 11].

De exemplu, pentru discretizarea structurii plane din figura 1.19a este indicat un element finit de tipul celui din figura 1.19b. Geometria acestuia poate fi descrisă prin relațiile:

$$x=\sum_{i=1}^{8}F_i(\xi,\eta)x_i\,;\ y=\sum_{i=1}^{8}F_i(\xi,\eta)\,y_i, \tag{1.98}$$

x_i, y_i fiind coordonatele nodurilor într-un sistem cartezian (local) de axe. Deoarece definirea univocă a marginilor curbe necesită cel puțin trei puncte, funcțiile F_i trebuie să fie în mod obligatoriu pătratice, cu particularitatea de a lua valori nule și unitare, atunci cînd se evaluează coordonatele unui nod al elementului finit. Aceas-

Scanned with OKEN Scanner

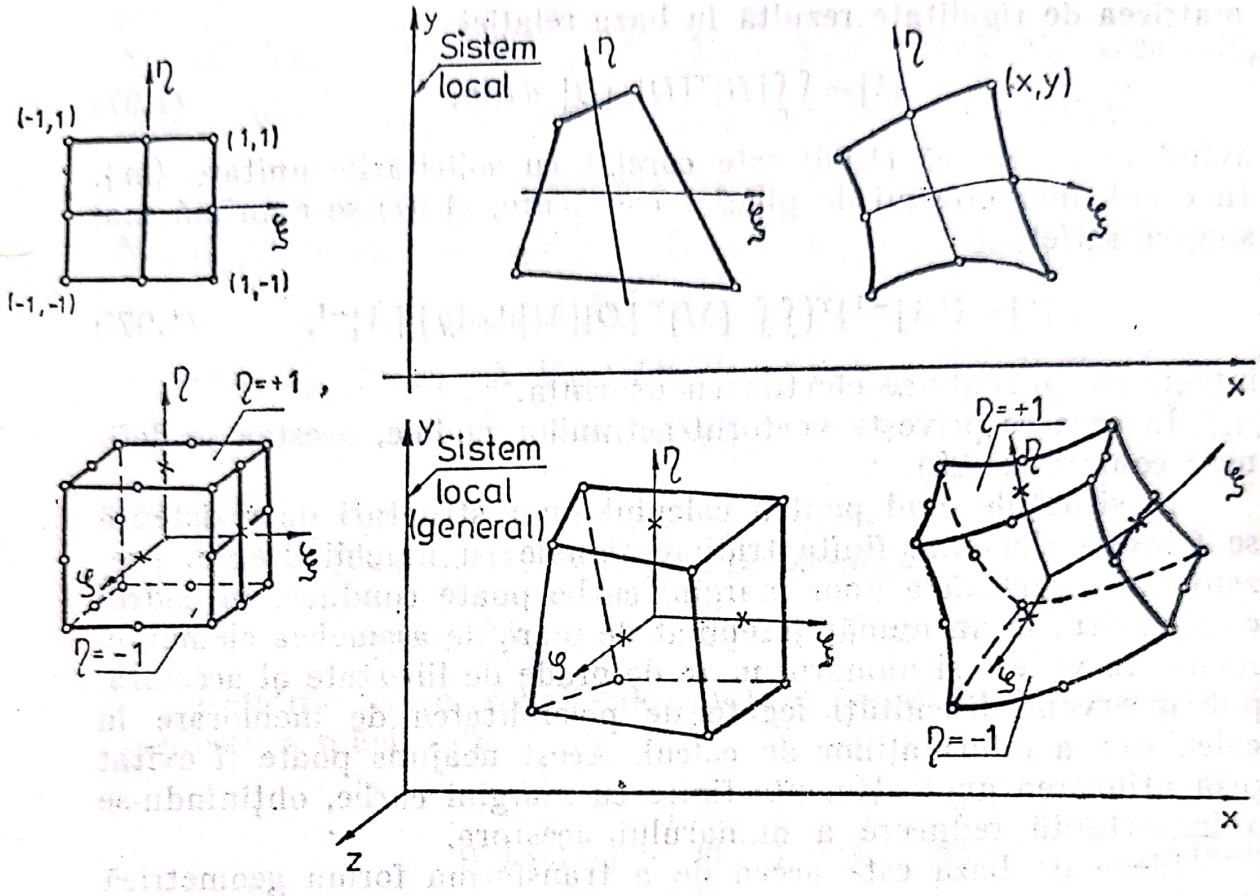


Fig. 1.18.

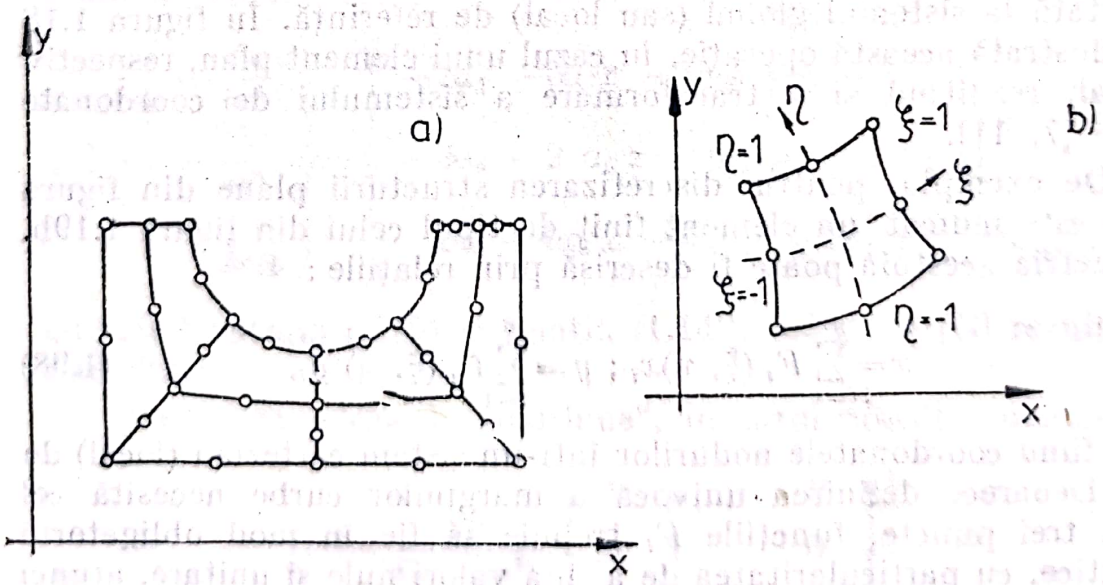


Fig. 1.19.

tă proprietate este indeplinită și de funcțiile de interpolare (1.74-ale elementului finit dreptunghiular din figura 1.12b, care îndepli)neşte acum rol de element finit generator sau de bază.

Astfel, relațiile (1.98) se pot scrie :

$$x=\sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta)x_i\,;\; y=\sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta)y_i. \tag{1.99}$$

Ținînd seamă de (1.74), se constată că atît cîmpul de deplasări cît și geometria marginilor elementului finit se exprimă prin intermediul funcțiilor de interpolare, avînd același ordin. Elementele finite astfel definite se numesc *izoparametrice*. Dacă ordinul polinomului de descriere a geometriei este mai mic, respectiv mai mare decît ordinul polinomului folosit la descrierea cîmpului de deplasări, elementele finite corespunzătoare se numesc *subparametrice*, respectiv *supraparametrice*, aceste tipuri fiind folosite de preferință în analiza plăcilor curbe.

Unul din avantajele mari pe care îl reprezintă elementele finite izoparametrice este acela că stabilirea caracteristicilor acestora poate fi făcută direct pe elementul finit generator, efectuîndu-se doar o transpunere în spațiul real. În ceea ce privește condițiile de continuitate, se vor avea în vedere următoarele reguli :

a) Dacă la generarea a două elemente finite vecine, se folosește un element finit, avînd funcții de interpolare care asigură satisfacerea condițiilor de continuitate între elementele vecine, atunci condițiile de continuitate vor fi satisfăcute și între elementele finite generate.

b) Dacă criteriile de completitudine sînt satisfăcute în elementul finit generator, acestea se regăsesc automat și în elementul finit generat.

Pentru a prezenta cîteva din particularitățile de definire a elementelor finite izoparametrice, se consideră pentru exemplificare cazul structurilor plane, conducerea calculelor putîndu-se extinde și la structurile tridimensionale. Astfel, avînd în vedere că pentru evaluarea mărimilor caracteristice elementului finit se cer rezolvate integrale de tipul :

$$\int_A f\left(u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy \tag{1.100}$$

și dat fiind faptul că funcția u este exprimată în sistemul local de referință, de exemplu conform (1.71) este necesar ca și derivatele

Scanned with OKEN Scanner

$\partial u/\partial x$ și $\partial u/\partial y$, respectiv produsul $dxdy$ să se exprime în același sistem de coordonate. Cu (1.74) rezultă :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \; ; \quad \frac{\partial y}{\partial y} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i , \tag{1.101}$$

iar pentru exprimarea derivatelor parțiale din (1.100), în baza regulilor de derivare, rezultă

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}, \tag{1.102}$$

unde :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{1.103}$$

este matricea jacobiană, care cu (1.99) mai poate fi scrisă și astfel :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}. \tag{1.104}$$

Din (1.102) rezultă :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \tag{1.105}$$

iar suprafața elementară poate fi scrisă sub forma

$$dxdy = |J| d\xi d\eta, \tag{1.106}$$

$|J|$ fiind determinantul matricei $[J]$. Presupunînd existența inversei $[J]^{-1}$, integrala (1.100) ia forma :

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \tilde{f}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{1.106}$$

f fiind forma transformată a funcțiunii f din (1.100). Această integrală se rezolvă numeric, convergența calculului fiind asigurată

Scanned with OKEN Scanner

atunci cînd integrarea numerică este suficient de bună în stabilirea ariei elementului finit cu margini curbe.

Cele de mai sus se exemplifică în cazul elementului finit dreptunghiular din figura 1.10, pentru care cu funcțiile de interpolare (1.73) geometria marginilor poate fi scrisă sub forma

$$x=\frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)x_1+(1+\xi)(1-\eta)x_2+(1+\xi)(1+\eta)x_3+(1-\xi)(1+\eta)x_4] \tag{1.107}$$

$$y=\frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)y_1+(1+\xi)(1-\eta)y_2+(1+\xi)(1+\eta)y_3+(1-\xi)(1+\eta)y_4] \tag{1.108}$$

iar cîmpul de deplasări:

$$u=\frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)u_1+(1+\xi)(1-\eta)u_2+(1+\xi)(1+\eta)u_3+(1-\xi)(1+\eta)u_4] \tag{1.109}$$

$$v=\frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)v_1+(1+\xi)(1-\eta)v_2+(1+\xi)(1+\eta)v_3+(1-\xi)(1+\eta)v_4]. \tag{1.110}$$

Plasînd sistemul de referință local cartezian în centrul de greutate al dreptunghiului, rezultă că $(x_1, y_1)=(-a,-b)$; $(x_2, y_2)=(a,-b)$; $(x_3, y_3)=(a, b)$; $(x_4, y_4)=(-a, b)$ și astfel *jacobianul* (1.103) este

$$[J]=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \tag{1.111}$$

inversa

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix}, \tag{1.112}$$

determinantul fiind

$$[J]=a\cdot b. \tag{1.113}$$

Cu valorile de mai sus se pot explicita termenii din (1.105), obținîndu-se:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{1}{a}\frac{\partial M_i}{\partial \xi};\quad \frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{1}{b}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \tag{1.114—115}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar cu (1.109—110) matricea $[B]$ din (1.24) rezultă

$$[B]=\begin{bmatrix} -\frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1+\eta)}{a} & 0 & \frac{-(1+\eta)}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\xi)}{q} & 0 & -\frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1-\xi)}{b} \\ -\frac{(1-\xi)}{b} & -\frac{(1-\eta)}{a} & -\frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1-\eta)}{a} & \frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1+\eta)}{a} & \frac{(1-\xi)}{b} & \frac{(1+\eta)}{a} \end{bmatrix}. \tag{1.116}$$

Utilizînd matricea de elasticitate (1.29) și (1.116) se obține, pentru elementul finit dreptunghiular plan, următoarea matrice de rigiditate

$$[k]^e=Q\begin{bmatrix} A+B & C & -A+B/2 & D & -A/2-B/2 & -G & A/2-B & -D \\ & F+G & -D & F/2-G & -C & -F/2-G/2 & D & -F+G/2 \\ & & A+B & -C & A/2-B & D & -A/2-B/2 & C \\ & & & F+G & -D & -F+G/2 & C & -F/2-G/2 \\ & & & & \text{simetric} & C & -A+B/2 & D \\ & & & & & F+C & -D & F/2-G/2 \\ & & & & & & A+B & -C \\ & & & & & & & F+G \end{bmatrix} \tag{1.117}$$

unde s-a notat pentru prescurtarea scrierii :

$A=8\beta$ $B=4\alpha\,(1-\mu)$, $C=3\,(1+\mu)$, $D=3\,(3\mu-1)$, $F=8\alpha$,

$G=4\beta(1-\mu)$

$$Q=\frac{E\cdot t}{24(\,(1-\mu^2)}, \tag{1.118}$$

iar

$$\alpha=\frac{a}{b} \text{ și } \beta=\frac{b}{a}. \tag{1.119}$$

Scanned with OKEN Scanner

1.6. ELEMENTE FINITE CU FISURĂ

Analiza stării de deformație și tensiune a corpurilor elastice cu fisuri necesită o partiționare cît mai fină posibilă. Totuși, avînd în vedere că în vecinătatea fisurii gradientul tensiunii este deosebit de ridicat, utilizarea elementelor finite convenționale poate deveni ineficientă. În cadrul cercetărilor efectuate, privitor la propagarea fisurilor în elementele de rezistență ale aparatelor de zbor, s-a inițiat și utilizarea unor tipuri de elemente speciale ; proprietatea lor esențială este aceea că datorită fisurii existente în elementele finite respective, gradientul de tensiune devine o mărime intrinsecă acestora [4, 11] (fig. 1.20). Față de formulările anterioare, cea dată de M. Creager [11] are marele avantaj că matricele caracteristice elementului finit *cu fisură* sînt date explicit, fără a fi necesare integrări numerice.

Matricele caracteristice ale elementului finit cu fisură se deduc prin utilizarea în reprezentarea stării de tensiune și deformații a corpului a funcțiilor de variabilă complexă, conform formulării date de G.A. Kolosov și N.J. Muskhelishvili.

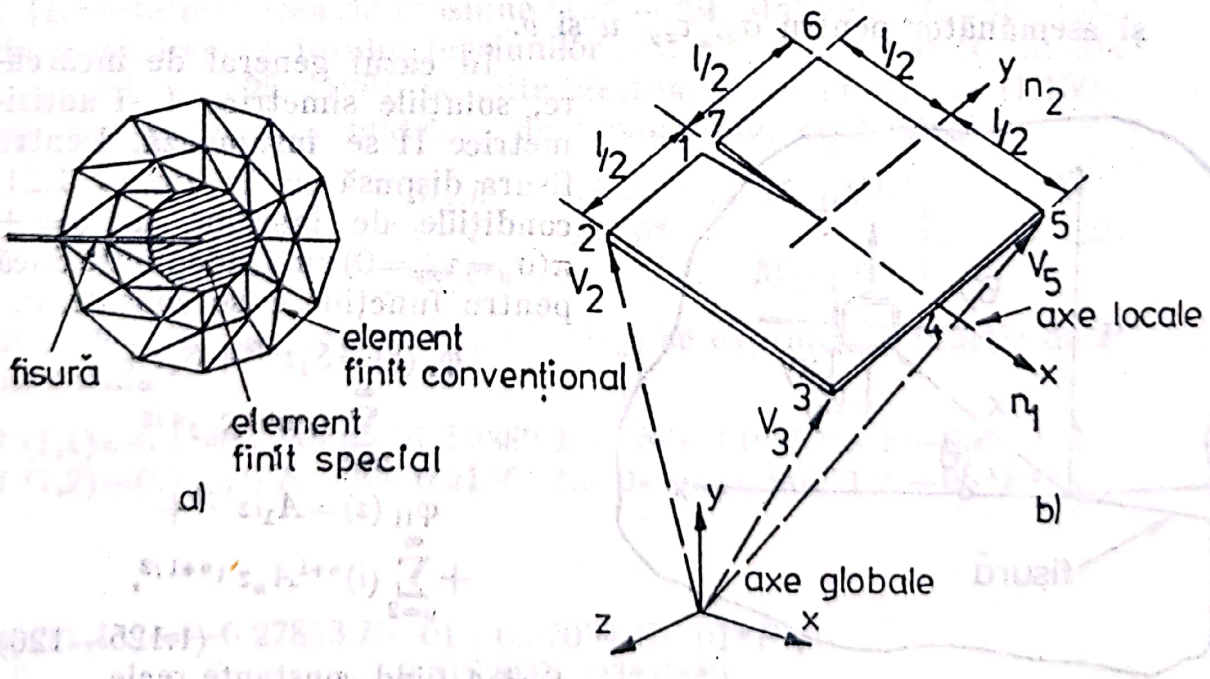


Fig. 1.20.

În problemele plane de elasticitate, tensiunile și deplasările se pot scrie sub forma [13]:

$$\sigma_x+\sigma_y=4\ Re[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[z\varphi''(z)+\Psi'(z)] \qquad (1.120...122)$$

$$2G(u+iv)=P.\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\Psi(z)},$$

unde P are valoarea $3-4\mu$ în problemele plane de deformație și $(3-\mu)/(1+\mu)$ în problemele plane de tensiune, μ și G au semnificațiile cunoscute, iar $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ sînt funcții de variabila complexă $z=x+iy=re^{i\theta}$. În (1.120...1.122) derivarea se efectuează în raport cu z, semnul „——" indică funcția complexă conjugată, iar simbolul Re denotă partea reală a expresiei din paranteză.

În cazul unei fisuri orientate în lungul axei x (fig. 1.21), starea de tensiune și deformație se poate exprima prin utilizarea funcțiilor lui H.H. Westergaard (și simplificate de Creager), de tipul I și II [11]. De exemplu:

$$(\sigma_y)_I=\varphi'_I(z)+\overline{\varphi'_I(z)}-\frac{z-\bar{z}}{2}[\varphi''_I(z)-\overline{\varphi''_I(z)}]-S$$

$$(\sigma_y)_{II}=-\frac{z-\bar{z}}{2}[\varphi'_{II}(z)-\overline{\varphi'_{II}(z)}] \qquad (1.123-124)$$

și asemănător pentru σ_x, τ_{xy}, u și v.

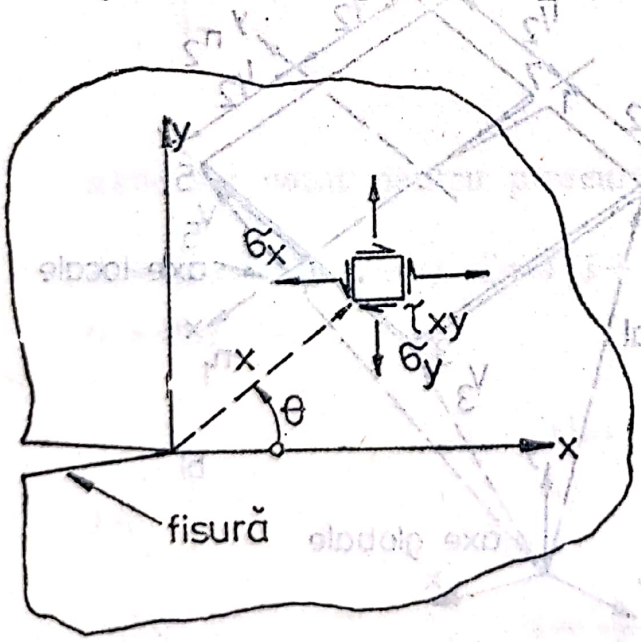


Fig. 1.21.

În cazul general de încărcare, soluțiile simetrice I și antisimetrice II se însumează. Pentru fisura dispusă ca în figura 1.21, condițiile de margine la $\theta=\pm\pi(\sigma_y=\tau_{xy}=0)$ sînt îndeplinite dacă pentru funcțiile φ se consideră:

$$\varphi_I(z)=S_1z^{1/2}+S_2z+$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}(i)^{n+1}S_nz^{n/2}$$
$$\varphi_{II}(z)=A_1iz^{1/2}+$$
$$+\sum_{o=2}^{\infty}(i)^{n+1}A_nz^{(n+1/2},$$

(1.125—126)

S și A fiind constante reale.

Scanned with OKEN Scanner

La elementul finit plan din figura 1.20b, avînd 14 grade de libertate, prin eliminarea gradelor de libertate de corp rigid, funcţiile (1.125—126) vor conţine 11 variabile independente, putîndu-se scrie sub forma :

$$\varphi_I(z)=a_1z^{1/2}+a_2z+a_3z^{3/2}+a_4iz^2+a\,z^{5/2}+a\,iz^3$$

$$\varphi_{II}(z)=a_7iz^{1/2}+a_8iz^{3/2}+a_9z^2+a_{10}iz^{5/2}+a_1z^3, \qquad (1.127-128)$$

coeficienţii a_i fiind considerate variabile de tip forţă.

În continuare, pentru formularea mărimilor caracteristice, se face uz de relaţia între forţele nodale independente $\{F\}^e$ şi deformaţiile corespunzătoare $\{d\}^e$

$$\{d\}^e=[f]^e\{F\}^e, \qquad (1.129)$$

în spiritul definirii elementelor finite static compatibile, unde

$$[f]^e=\int_V[T_1]^T[D]^{-1}[T_1]dV \qquad (1.130)$$

este matricea de flexibilitate a elementului finit. În (1.130), cu $[T_1]$ s-a notat matricea care defineşte starea de tensiune, în echilibru static, corespunzătoare forţelor nodale independente, în cadrul egalităţii

$$\{\sigma\}^e=[T_1]\{F\}^e, \qquad (1.131)$$

iar $[D]$ este matricea de tensiune (1.29—30). Matricea $[T_1]$ obţinută prin alcătuirea vectorului tensiunilor (σ_x, σ_y, τ_{xy}), scrise în funcţie de functiile (1.125—126), permite efectuarea integrării din (1.130), obţinîndu-se, pentru matricea de flexibilitate, cantitatea :

$$[f]^e=\frac{t\cdot10^6}{G\,(P-1)}\begin{vmatrix} M_{11}h & M_{12}h^{3/2}\ldots & M_{1,11}h^{7/2} \\ & M_{22}h^2 & \\ \text{simetric} & & M_{11,11}h^6 \end{vmatrix}, \qquad (1.132)$$

unde : $h=l/4$, iar factorii $M_{ij}=M(i,j)$ se exprimă în funcţie de P sub forma

$M(1,1)=0.17627\,E-05-0.52882\,E-05*P+0.35255\,E-05*P**2$
$M(1,2)=0.12530\,E-04-0.21562\,E-04*P+0.90311\,E-05*P**2$
.
.
.
$M(11,11)=-0.27853\,E-01+0.27034\,E-01*P+$
$+0.81920E-03*P**2.$

Scanned with OKEN Scanner

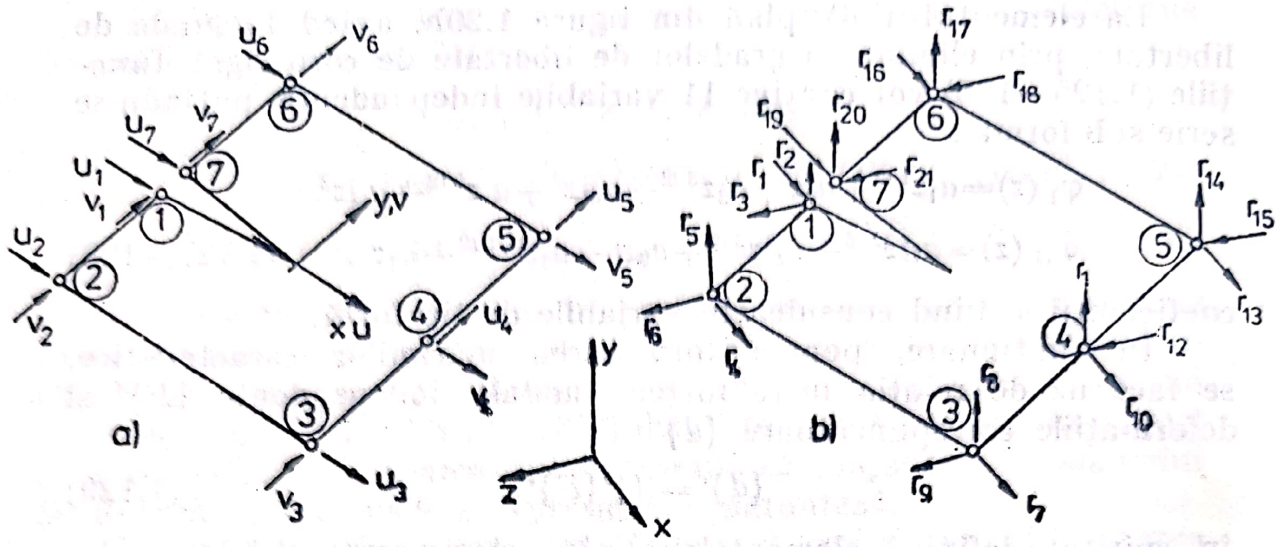


Fig. 1.22.

Exprimînd şi deplasările u şi v ale nodurilor în funcţie de aceleaşi funcţiuni $\varphi(z)$, rezultă în sistemul local (fig. 1.22a)

$$\{u\}=[T_2]\{F\}^e. \tag{1.133}$$

Din (1.131) şi (1.133) se poate observa că $\{F\}^e=\{a_1\ a_2 \ldots a_{11}\}^T$. Deoarece relaţia (1.133) nu conţine starea de tensiune nulă, aceasta se rescrie sub forma:

$$\{u\}=[T_2|T_0]\{F|u_0\}^e, \tag{1.134}$$

unde $\{u_0\}=\{u_{01}\ u_{02}\ u_{03}\}$ reprezintă cele trei deplasări de corp rigid posibile în planul elementului.

În mod asemănător, faţă de sistemul global de axe se obţine:

$$\{r\}^e=[Q|Q_0]\{F|u_0\}^e, \tag{1.135}$$

avînd 21 de elemente (fig. 1.22b), sau mai restrîns

$$\{r\}^e=[Q_1]\{F_1\}^e, \tag{1.135'}$$

unde notaţiile $[Q_1]$, respectiv $\{F_1\}$ rezultă prin identificare cu (1.135). Matricea $[Q_1]$ poate fi pusă sub forma:

$$[Q_1]=\frac{1}{G}\begin{bmatrix} q(1,1) & q(1,2) \ldots q(1.11)-\frac{l}{2}n_2 & n_2 & n_1 \\ q(2,1) & & & \\ \vdots & & & \\ q(7,1) & \ldots \quad q(7,11)-\frac{l}{2}n_2 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \tag{1.136}$$

Un element al matricei are expresia :

$$q(i,j)=[R_1(i,j)\times P+RR_1(i,j)]\ l^{n(j)}n_1+$$
$$+[R_2(i,j)\times P+RR_2(i,j)]\ l^{n(j)}n_2 \qquad (1.137)$$

și reprezintă vectorul deplasării nodului i, produsă de o cauză F_{ij} unitară, avînd componente pe axele XYZ ale sistemului global de axe. În (1.137), $[R_1]$, $[RR_1]$, $[R_2]$ și $[RR_2]$ sînt matrice cu dimensiunile 7×11, avînd ca elemente valori numerice constante, independente de dimensiunile elementului finit ; exponenții $n\ (j)$ au valori numerice cuprinse între 0,5 și 3, iar n_2 și n_1 sînt vectorii unitari care definesc poziția elementului finit în spații, de exemplu :

$$n_1=\frac{V_{23}}{V_{23}} \text{ cu } V_{22}=V_3-V_2.$$

Din expresia vectorului $\{F_1\}$ (1.135—135′) se explicitează cel al forțelor independente, obținîndu-se la început :

$$\{F\}^e=[I|0]\{F_1\}^e \qquad (1.138)$$

și apoi prin preînmulțirea ecuației (1.135′) cu $[Q_1]$ rezultă

$$\{F_1\}^e=([Q_1]^T[Q_1])^{-1}[Q_1]^T\{r\}^e, \qquad (1.139)$$

care înlocuită în (1.138) conduce la ecuația

$$\{F\}^e=[T_3]\{r\}^e, \qquad (1.140)$$

unde :

$$[T_3]=[I|0]([Q_1]^T[Q_1])^{-1}[Q_1]^T. \qquad (1.141)$$

Dacă se mai efectuează și înlocuirea valorii (1.140) în (1.129), cu notația $[a]=[f]^e\ [T_3]$, se obține :

$$\{d\}^e=[a]\{r\}^e \qquad (1.142)$$

sau în baza egalității (1.146) care înlesnește trecerea de la relațiile între deplasări, exprimate în sistemul local respectiv global de axe, la cele între forțele nodale raportate de asemenea la cele două sisteme de referință, rezultă :

$$[U]\ \{F\}^e=\{L\}^e, \qquad (1.143)$$

$\{L\}^e$ fiind vectorul forțelor nodale care corespund deplasărilor $\{r\}^e$.

Scanned with OKEN Scanner

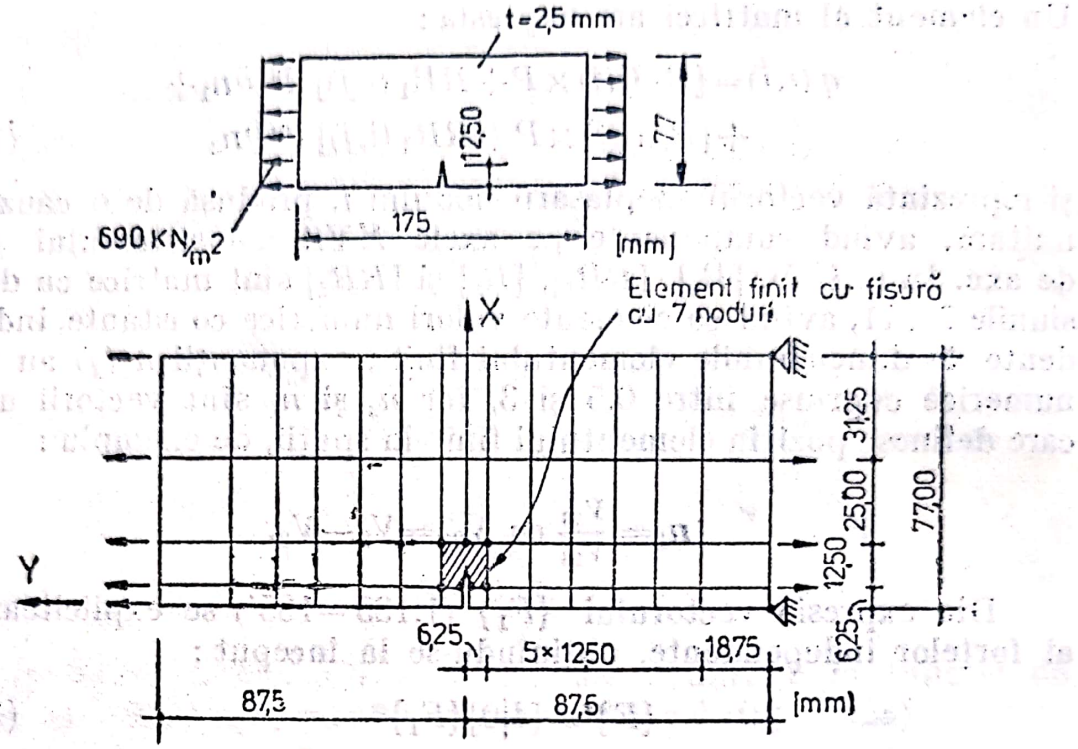


Fig. 1.23.

În calculul practic, pe baza relațiilor deduse, *factorul de intensitate a tensiunii*, rezultă $K_I = a_1 \sqrt{2\pi}$ pentru cazul stării de tensiune simetrice în raport cu fisura și $K_{II} = -a_7\sqrt{2\pi}$ în cazul celor antisimetrice, a_1 și a_7 fiind cei doi termeni ai vectorului $\{F\}^e$.

Figura 1.23 ilustrează modul în care este plasat elementul finit cu fisură în domeniul discretizat al unei platbenzi cu fisură, supusă la întindere. Modelul de calcul totalizează 77 noduri, 55 elemente finite, 281 forțe nodale independente și 151 deplasări nodale libere. Calculul efectuat, utilizînd un element finit cu fisură cu 7 noduri a condus la o valoare K_I cu 15,4 % mai mică decît cea exactă [11]. Prin utilizarea unui element finit cu fisură cu 11 noduri (pe laturile elementului paralele cu fisura sînt dispuse cîte două noduri intermediare) și menținînd același număr total de noduri, elemente finite și necunoscute, printr-o altă discretizare a platbenzii valoarea factorului de intensitate a tensiunii se obține cu o precizie mult mai mare, diferența față de valoarea exactă fiind de numai 1,41 %.

Scanned with OKEN Scanner

1.7. DISCRETIZAREA STRUCTURII

Așa cum s-a arătat, pe scurt în paragraful 1,1, prin discretizarea unei structuri se înțelege subîmpărțirea acesteia într-un număr oarecare de elemente finite, interconectate în nodurile lor exterioare. În cadrul acestei operații, se aleg tipurile de elemente finite care vor fi utilizate și se stabilește repartizarea lor pe domeniul discretizat, rezultînd astfel numărul, dimensiunea și forma acestora. La structurile alcătuite numai din bare, modelul de calcul ce rezultă în urma discretizării structurii asigură satisfacerea condițiilor de compatibilitate și de echilibru atît în interiorul fiecărui element, cît și pentru structura întreagă ; la structurile bi- și tridimensionale, modelul de calcul rezultat prin discretizare nu satisface condițiile menționate decît parțial. De asemenea, forțele nodale, care depind de gradele de libertate prevăzute în nod, nu au în acest caz corespondență fizică în structura dată, în cazul elementelor finite liniare aceste forțe coincizînd chiar cu eforturile rezultante din secțiune. Din această cauză, pentru ca rezultatele obținute prin calculul condus pe un model cu element bi — sau tridimensionale să aproximeze cît mai bine soluția problemei, discretizarea trebuie să aibă la bază o analiză atentă a stării de deformații și eforturi din structură, luînd în considerare aspectele particulare de formă, material, rezemare și încărcare pe care le prezintă aceasta.

Poziția nodurilor, respectiv a liniilor sau suprafețelor de separare între elementele finite (linii, suprafețe nodale) este condiționată atît de prezența unor variații în geometria structurii sau calitatea materialului acesteia, cît și de existența unor încărcări concentrate sau chiar distribuite, dar după legi de variație discontinue. În figura 1.24 sînt prezentate schematic cîteva situații în care poziția nodurilor sau a liniilor nodale este impusă.

În cazul existenței unor concentratori de tensiune, cum este acela al intrîndurilor (fig. 1.25a), în vîrful unghiului concav va trebui plasat un nod. Există posibilitatea de a utiliza aici un element finit special, prevăzut el însuși cu un decupaj [5] ; apar însă dificultăți în alcătuirea matricei de rigiditate, motiv pentru care această cale se folosește mai rar. Cînd se urmărește efectul local al concentratorului de tensiune, pentru cunoașterea vîrfului de tensiune, uneori se preconizează procedeul îndesirii succesive a

Scanned with OKEN Scanner

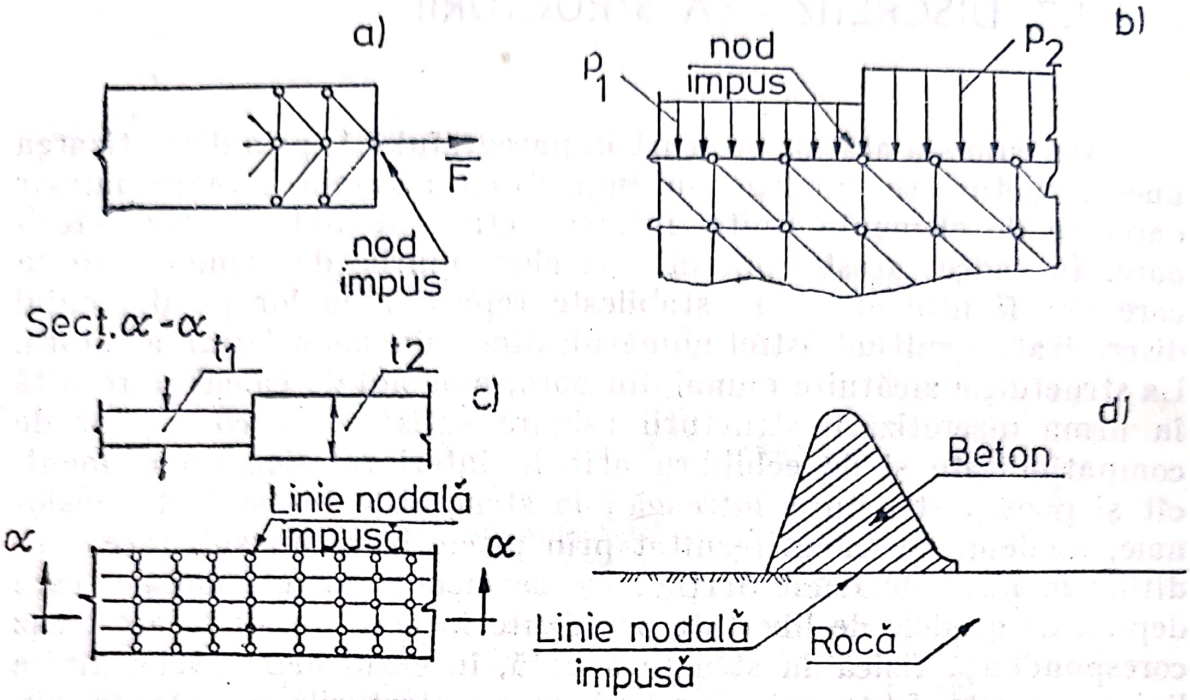


Fig. 1.24.

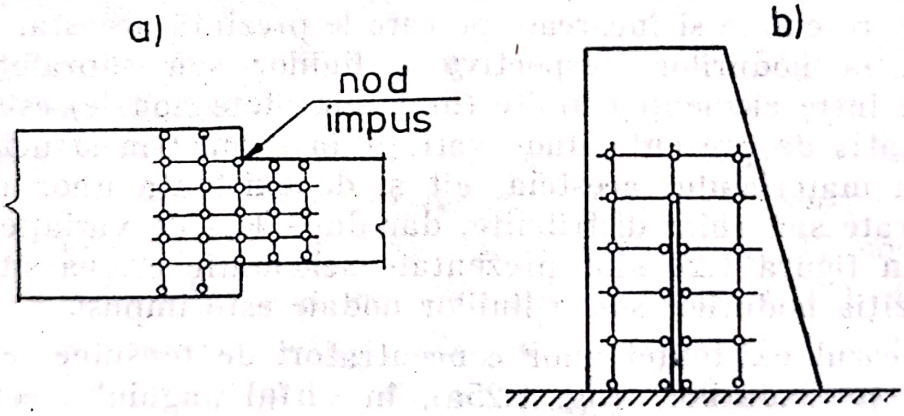


Fig. 1.25.

rețelei în zona cercetată, procedeu detaliat și exemplificat în capitolul 2.

Prezența unor fisuri necesită dedublarea nodurilor în rețea (fig. 1.25 b), la capătul fisurii fiind dispus un singur nod. Pentru a prinde efectul local al concentratorului de tensiune de la capătul

Scanned with OKEN Scanner

fisurii, sînt și în acest caz imaginate elemente finite speciale, cu fisură [11] (detaliat în § 1.6).

În ceea ce privește tratarea marginilor curbe, fie că se procedează la o îndesire a rețelei, utilizînd elementele finite cu margini drepte (triunghiu, patrulater oarecare, piramidă etc.), fie că se apelează la avantajele pe care le prezintă din acest punct de vedere elementele finite izoparametrice cu margini curbe.

Rezultatele (deplasările și tensiunile) care se obțin cu metoda elementelor finite sînt dependente de soluția de discretizare aleasă. Din acest motiv, există situații, în special în cazul unor geometrii complicate, cînd problema inginerească abordată cu această metodă trebuie investigată în mai multe variante de discrezitare, urmînd să se trieze rezultatele obținute.

Legat de operația de discretizare, o problemă deosebit de importantă este *numerotarea* nodurilor rețelei. În figura 1.26 sînt reprezentate două modalități de marcare a nodurilor, respective a elementelor finite, cea din figura 1.26*a* fiind mai des utilizată.

Astfel, dimensiunea sistemului de ecuații algebrice liniare la care conduce operația de asamblare a elementelor finite depinde nu numai de dimensiunile matricelor de rigiditate a elementelor finite componente, ci și de numărul și modul de numerotare a nodurilor rețelei. Așa cum se arată în § 1.8, matricea coeficienților necunoscutelor este o matrice de tip bandă, a cărei lățime influențează atît cantitatea de memorie necesară, cît și timpul de rezolvare. Pentru a reduce lățimea benzii matricei, în cazul utilizării elementelor finite complexe, se vor prefera cele cu noduri exterioare suplimentare, în dreptul cărora se definesc derivatele deplasărilor ca și grade de libertate suplimentare ; în ceea ce privește numerotarea nodurilor, se va urmări realizarea unei diferențe D minime

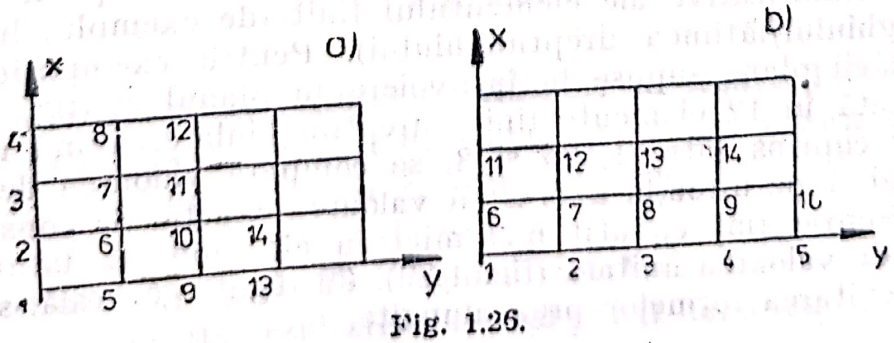


Fig. 1.26.

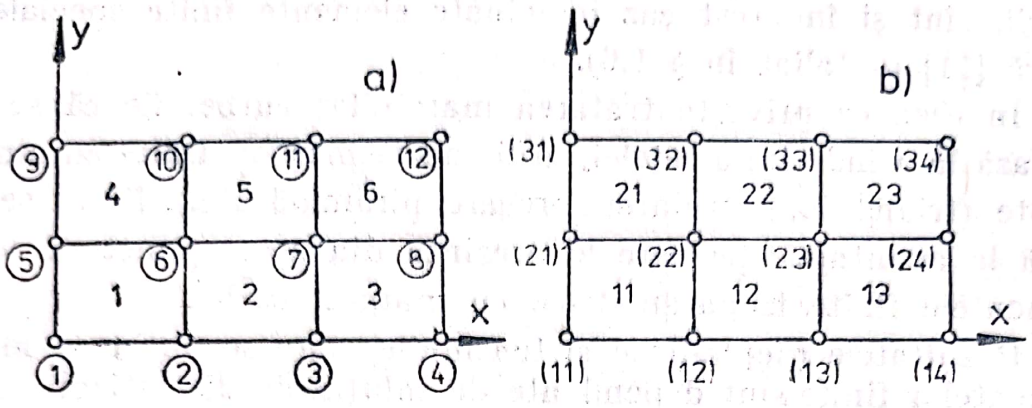


Fig. 1.27.

între numerele de ordine a două noduri vecine, avînd în vedere că semilățimea L a benzii este dată de expresia :

$$L=(D+1)g,$$

g fiind numărul gradelor de libertate al fiecărui nod. De exemplu, pentru dreptunghiul din figura 1.27, avînd cîte două grade de libertate la fiecare nod, rezultă : în varianta a) de numerotare $L=(4+1)2=10$ și în varianta b) $L=(5+1).2=12$.

Pentru structuri avînd o geometrie complexă, este greu de realizat o numerotare a nodurilor care să conducă la o valoare L minimă. În asemenea situații, se apelează la programe de calcul automat, elaborate pe baza unor algoritmi de optimizare a numerotării [6, 10]. Utilizarea unor asemenea programe este întotdeauna indicată, dacă se are în vedere faptul că din timpul total de calcul la calculatorul electronic, cel afectat rezolvării sistemului de ecuații poate reprezenta 70—80 %, fiind totodată direct proporțional cu rădăcina pătrată a semilățimii benzii.

Rezultatele calculelor sînt mult influențate de raportul dimensiunilor semnificative ale elementului finit (de exemplu, lungimea dreptunghiului/lățimea dreptunghiului). Pentru exemplificare, în cazul plăcii plane supuse la încovoiere în planul ei (fig. 1.28) și discretizată în 12 elemente finite dreptunghiulare, avînd raportul laturilor cuprins între 1,125 și 8, se compară valoarea deplasării punctului A pe direcția axei x cu valoarea exactă. Se constată că erorile comise sînt cu atît mai mici cu cît raportul laturilor se apropie de valoarea unitară (fig. 1.29). Ca regulă generală, se recomandă evitarea formelor prea alungite.

Scanned with OKEN Scanner

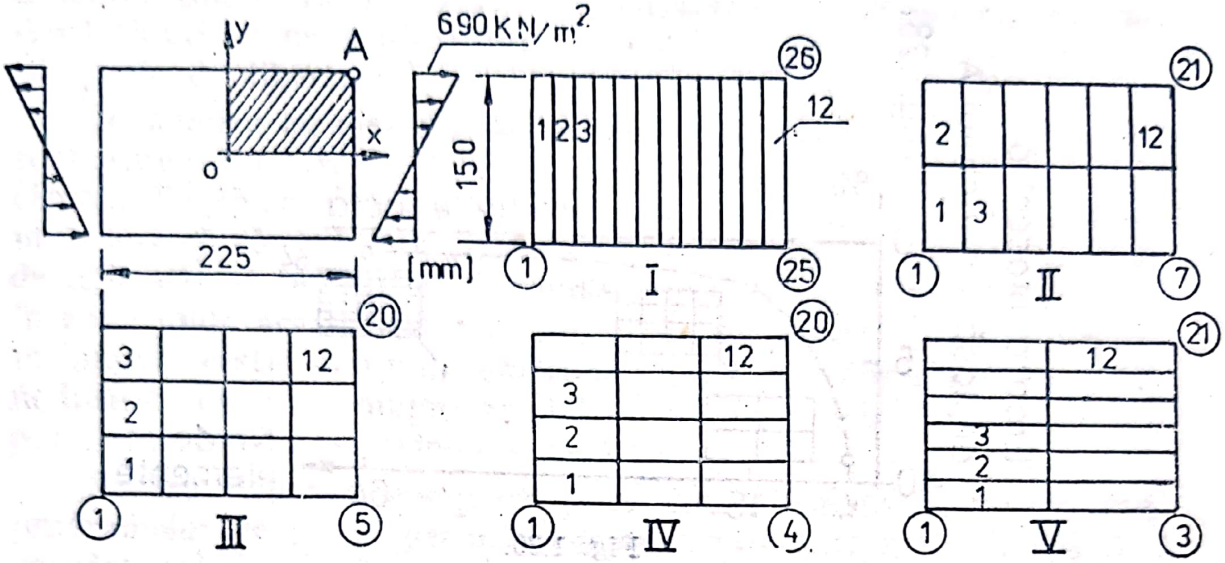


Fig. 1.28.

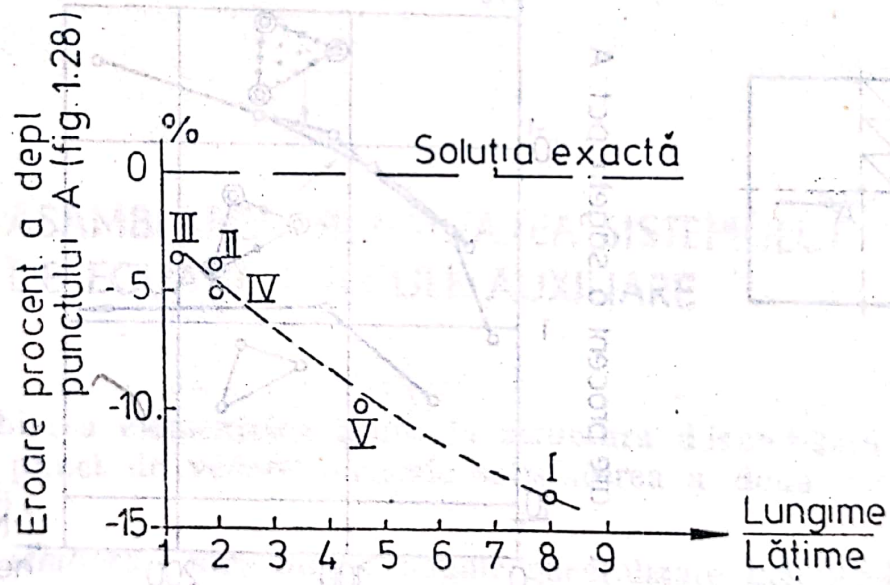


Fig. 1.29.

Păstrînd același raport al laturilor, în figura 1.30 se poate urmări influența numărului de elemente asupra valorii deplasării punctului A pe direcția axei x, utilizînd element finit dreptunghiular cu opt grade de libertate și conducînd calculul pe sfertul de placă haşurat în fig. 1. 28. Se poate constata că de la un anumit număr de elemente rezultatele nu mai pot fi îmbunătățite simțitor

Scanned with OKEN Scanner

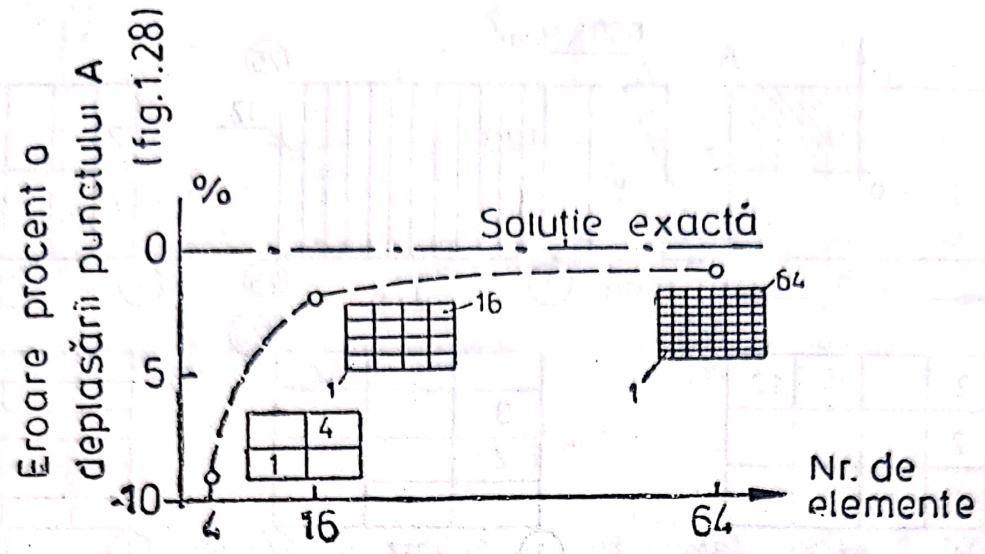


Fig. 1.30.

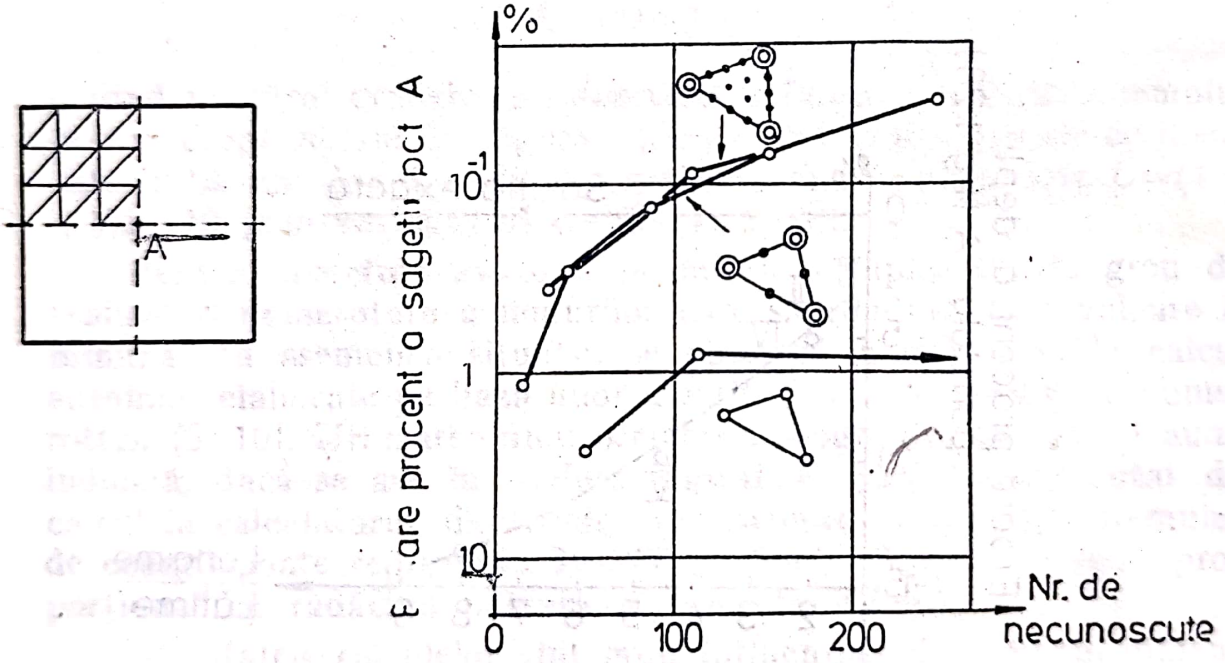


Fig. 1.31.

prin creşterea numărului acestora. Acest aspect este ilustrat şi în cazul unei plăci încovoiate, simplu rezemate pe contur, supusă acţiunii unei forţe concentrate aplicată în centrul plăcii (fig. 1.31); pentru a reduce eroarea în determinarea săgeţii punctului *A*, se recomandă înlocuirea elementului finit triunghiular cu 9 grade de libertate (Nr. crt. 20 din Tab. 1.1) cu cel avînd 21 sau 35 grade de libertate (Nr. ct. 22, 24 din Tab. 1.1). Remarcînd însă diferenţe

Scanned with OKEN Scanner

nesemnificative între rezultatele obținute prin utilizarea acestor două tipuri de elemente finite, în practică se va prefera cel cu 21 grade de libertate.

În analiza cu metoda elementelor finite a stării de deformație și tensiune din terenul de fundație, o problemă esențială este precizarea limitelor semispațiului sau semiplanului cercetat. Avînd în vedere că efectul acțiunilor descreşte cu distanța pînă la punctul de aplicație al încărcărilor, mediul continuu va trebui extins pînă în zona unde acest efect este neglijabil, iar condițiile de rezemare, în lungul acestei margini, idealizate ; dacă, de exemplu, deplasările nodurilor rețelei în lungul acestei margini sînt foarte mici, acestea pot fi blocate, considerîndu-le deci fixe.

Pentru structuri complexe și cu dimensiuni mari, majoritatea programelor de calcul permit generarea automată a topologiei și a coordonatelor nodurilor, reducînd prin aceasta substanțial volumul datelor inițiale [15].

1.8. ASAMBLAREA, REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII, CALCULE AUXILIARE

Asamblarea elementelor finite în structura discretizată comportă din punct de vedere mecanic satisfacerea a două categorii de condiții :

a) *de echilibru*, între forțele nodale generalizate independente și cele exterioare direct aplicate (1.144) ;

b) *de continuitate*, între deformațiile nodale generalizate independente și deplasările structurii care provin din acțiunea forțelor exterioare (1.145).

Din punct de vedere matematic, cele două condiții se pot scrie astfel

$$[U]\ \{F\}=\{L\} \tag{1.144}$$

respectiv

$$\{d\}=[a]\ \{r\} \tag{1.145}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-au notat cu .

$\{d\}$ vectorul obținut prin considerarea tuturor deformațiilor generalizate independente ale elementelor finite, cu eliminarea deformațiilor corespunzătoare unor stări de deformații nule (mișcare de corp rigid),

$\{F\}$ vectorul obținut prin considerarea tuturor forțelor generalitaze independente (corespunzătoare deformațiilor $\{d\}$), cu eliminarea forțelor care definesc stări de tensiune nule,

$\{L\}$ vectorul forțelor exterioare raportate la sistemul global de axe,

$\{r\}$ vectorul deplasărilor nodale ale structurii definite în sistemul global de axe.

$[U]$ matricea de transformare în condiția de echilibru,

$[a]$ matricea de transformare în condiția de continuitate.

Se presupune de asemenea că în ecuațiile (1.144—145) sînt introduse toate condițiile restrictive privitoare la încărcare, respectiv rezemare.

Aplicînd principiul forțelor virtuale se poate arăta [11] că între matricele $[a]$ și $[U]$ există relația:

$$[a]=[U]^T. \tag{1.146}$$

Cu egalitatea (1.146) condițiile (1.144—145) se scriu

$$[a]^T\{F\}=\{L\}, \tag{1.144'}$$

respectiv

$$\{d\}=[U]^T\{r\}. \tag{1.145'}$$

Detașînd deformațiile elastice $\{d_e\}$ de cele inițiale $\{d_0\}$ sub forma

$$\{d\}=\{d_e\}+\{d_0\}, \tag{1.147}$$

deformațiile elastice se pot exprima cu ajutorul vectorului $\{F\}$ astfel

$$\{d_e\}=[D]\{F\} \tag{1.148}$$

sau

$$\{F\}=[k]\{d_e\}, \tag{1.149}$$

unde s-a notat cu :

$[D]$ matricea globală de flexibilitate, formată cu ajutorul matricelor de flexibilitate (nesingulare) ale elementelor componente,

$[k]$ matricea globală de rigiditate, formată cu ajutorul matricelor de rigiditate (nesingulare) ale elementelor componente,

între matricele de flexibilitate și rigiditate existînd relația

$$[k]=[D]^{-1}. \tag{1.150}$$

Utilizînd (1.147—148) și (1.145'), condiția de continuitate devine :

$$[D]\{F\}+\{d_0\}-[U]^T\{r\}=\{0\} \tag{1.151}$$

sau, prin preînmulțirea acestei ecuații cu k

$$\{F\}+[k]\{d_0\}-[k][U]^T\{r\}=\{0\}. \tag{1.152}$$

Pentru explicitarea condiției de echilibru se elimină întîi vectorul $\{d_e\}$ din ecuațiile (1.147) și (1.149), apoi vectorul $\{F\}$ astfel obținut se înlocuiește în condiția (1.144). Ținînd cont și de relația (1.146), se obține :

$$[a]^T[k]\{d\}=\{L\}+[a]^T[k]\{d_0\}. \tag{1.153}$$

Cu cele de mai sus, ecuațiile în metoda deplasărilor rezultă în felul următor :

folosind relația (1.146), din ecuația (1.152) rezultă

$$\{F\}=[k][a]\{r\}-[k]\{d_0\}, \tag{1.154}$$

care introdusă în ecuația de echilibru (1.144), conduce la

$$[K]\{r\}=\{L\}+[a]^T[k]\ \{d_0\}. \tag{1.155}$$

unde s-a notat cu :

$$[K]=[a]^T[k][a], \tag{1.156}$$

matricea de rigiditate asamblată a structurii. Această matrice conține toate condițiile restrictive.

Rezolvînd sistemul (1.155) se obțin deplasările structurii, care permit determinarea forțelor și deformațiilor nodale cu ajutorul ecuațiilor (1.154), respectiv (1.145)

În metoda elementelor finite, deplasările structurii și încărcărilor exterioare se raportează de obicei la sistemul global de axe, în timp ce deformațiile generalizate independente $\{d\}$ se definesc

Scanned with OKEN Scanner

față de diverse sisteme locale de axe ; din acest motiv, matricea $[a]$ va trebui să îndeplinească următoarele patru proprietăți :

1. Selectează acele deplasări ale structurii care se asociază cu deformațiile elementelor (matricea $[a_1]$).

2. Transformă aceste deplasări exprimate față de sistemele locale de axe ale elementelor (matricea $[a_2]$).

3. Elimină starea de deformație nulă — mișcarea de corp rigid (matricea $[a_3]$).

4. Deplasările elastice rămase se transformă în deformații în nodale generalizate independente (matricea $[a_4]$).

Astfel, matricea $[a]$ rezultă prin produsul

$$[a]=[a_4][a_3][a_2]\ [a_1], \tag{1.157}$$

rigiditatea (1.156) putîndu-se scrise sub forma

$$[K]=[a_1]^T[a_2]^T[a_3]^T[a_4]^T[k][a_4][a_3][a_2]a_1] \tag{1.158}$$

sau

$$[K]=[a_1]^T[s][a_1], \tag{1.158'}$$

unde s-a notat cu :

$$[s]=[a_2]^T[a_3]^T[a_4]^T[k][a_4][a_3][a_2], \tag{1.159}$$

matricea singulară de rigiditate a structurii în sistemul global de axe avînd forma

$$[s]=\begin{bmatrix} [s_1] & & & 0 \\ & [s_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [s_m] \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{1.160}$$

unde :

$$[s_m]=[a_{m2}]^T[a_{m3}]^T[a_{m4}]^T[k_m][a_{m4}][a_{m3}][a_{m2}] \tag{1.161}$$

reprezintă matricea singulară de rigiditate a elementului „m“ exprimat în sistemul global de axe.

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît matricea $[a_1]$ este o matrice booleană, avînd doar rolul de a însuma acei termeni din matricele de rigiditate ale elementelor finite care corespund unor grade de libertate comune, produsul din (1.158') poate fi suprimat, rezolvînd asamblarea matricei $[K]$ prin procedee de programare.

Între forţele nodale $\{Q\}$ şi deplasările nodale $\{\Delta\}$, care includ şi deplasările de corp rigid există relaţia:

$$\{Q\}=[s]\{\Delta\}-[Q_0], \tag{1.162}$$

unde $\{Q_0\}$ reprezintă forţele nodale echivalente unei stări de deformaţii iniţiale.

Deplasările nodale $\{\Delta\}$ pot fi exprimate în funcţie de deplasările structurii sub forma:

$$\{\Delta\}=[a_1]\{r\}, \tag{1.163}$$

iar ecuaţia corespunzătoare de echilibru este

$$[U_1]\{Q\}=\{L\} \tag{1.164}$$

sau, în baza egalităţii (1.146)

$$[a_1]^T\{Q\}=\{L\}. \tag{1.165}$$

Înlocuind (1.163) în (1.162) şi apoi vectorul $\{Q\}$ astfel obţinut în (1.165), rezultă

$$[K]\{r\}=\{L\}+\{L_0\}, \tag{1.166}$$

unde:

$$\{L_0\}=[a_1]^T\{Q_0\} \tag{1.167}$$

reprezintă forţele exterioare echivalente stării de deformaţie iniţiale.

Rezolvînd sistemul (1.166) se obţin deplasările structurii.

Pentru a exemplifica alcătuirea automată a matricei de rigiditate a structurii, se va presupune cazul unei structuri continue, plane, discretizată cu două elemente finite triunghiulare avînd şase grade de libertate (fig. 1.32). Segmentul de program din figura 1.33 rezolvă plasarea elementelor matricei de rigiditate (1.24) a elementului finit (notată cu C), calculate în prealabil, în matricea de rigiditate a structurii (notată cu ST), însumînd totodată elementele corespunzătoare. Variabila de indexare LL reprezintă

Scanned with OKEN Scanner

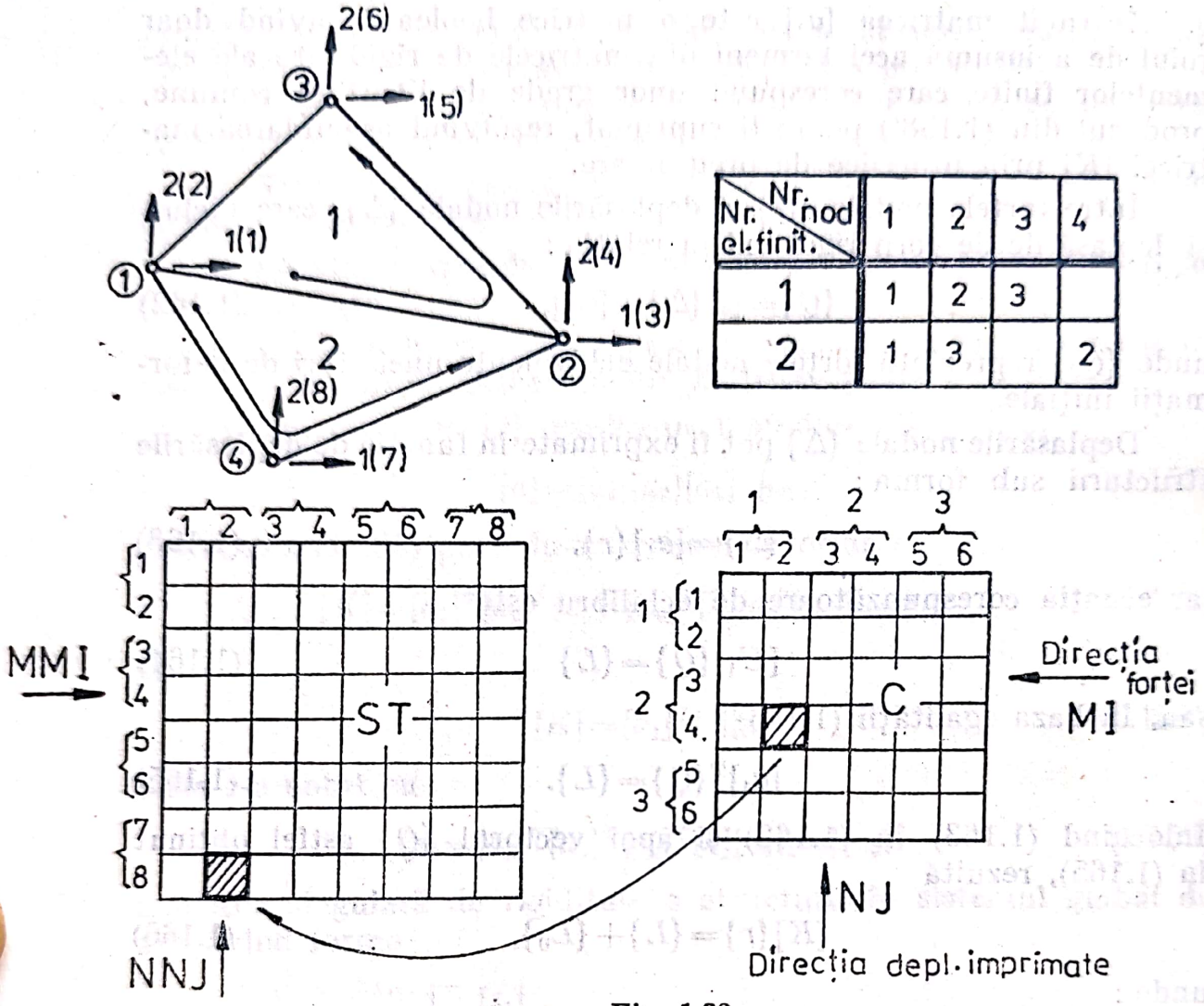


Fig. 1.32.

numărul de ordine al nodului (1, 2, 3) unde se imprimă deplasarea unitară, iar *KK* numărul de ordine al nodului (1, 2, 3) unde apare reacțiunea corespunzătoare ; NOD (*I*, *J*) este un tablou care conține numerele de ordine ale nodurilor elementului finit în parcurgere anterioară (fig. 1.32), primul indice reprezentînd numărul de ordine al elementului finit analizat, iar cel de al doilea indicînd primul, al doilea sau al treilea nod al elementului. Între etichetele 207 și 208, cu *M* și *N* s-a notat numărul liniilor, respectiv coloanele precedente în matricea de rigiditate a structurii, iar cu *I* și *J* în cea a elementului finit. Ciclul pe eticheta 209 efectuează însumarea rigidităților corespunzătoare stabilind în prealabil corespondența indicilor din matricea *C* și *ST* ; astfel, *MMI* și *NNJ* reprezintă numărul

```
      FORMAREA MATRICEI DE RIGIDITATE
      VOL=0.5*TH*Z
      DO 311 J=1,6
      DO 311 I=1,6
      DO 311 KM=1,3
  311 BTDBA(I,J)=BTDBA(I,J)+B(KM,I)*DBA(KM,J)
      DO 312 J=1,6
      DO 312 I=1,6
      DO 312 KM=1,6
  312 C(I,J)=C(I,J)+A(KM,I)*BTDBA(KM,J)
      DO 202 LL=1,3
      DO 202 KW=1,3
      IF(NOD(LK,KW)-K) 202,206,206
  206 IF(NOD(LK,KW)-L)207,207,202
  207 M=2*(NOD(LK,KW)-K)
      N=2*(NOD(LK,LL)-K)
      I=2*(KW-1)
      J=2*(LL-1)
      IF(N) 202,208,208
  208 DO 209 NJ=1,2
      DO 209 MI=1,2
      MMI=M+MI
      NNJ=N+NJ
      IMI=I+MI
      JNJ=J+NJ
  209 ST(MMI,NNJ)=ST(MMI,NNJ)+C(IMI,JNJ)
  202 CONTINUE
C     INTRODUCEREA DEPLASARILOR PRESCRISE
      DO 210 I=1,NBOUN
      M=NF(I)-K
      MM=NF(I)-1
      IF(M) 210,212,212

  212 IF(M-24) 213,213,210
  213 DO 214 J=1,2
      IF(NB(I,J))214,215,214
  215 NMI=2*M+J
      ST(NMI,NMI)=ST(NMI,NMI)*1.0E+40
      JNJ=2*MM+J
      U(JNJ)=ST(NMI,NMI)*BV(I,J)
  214 CONTINUE
  210 CONTINUE
```

Fig. 1.33.

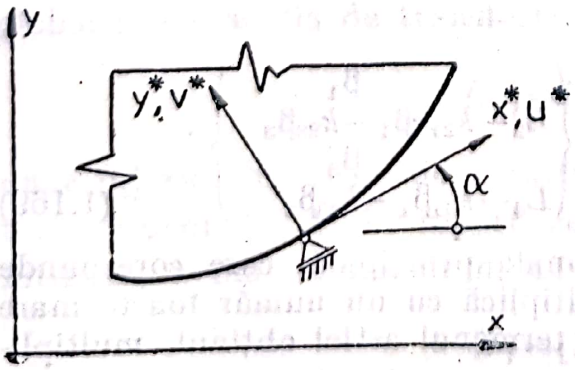


Fig. 1.34.

Scanned with OKEN Scanner

de ordine al liniei, respectiv al coloanei din matricea de rigiditate a structurii în care se introduce aportul elementului finit cu numărul de ordine LK.

Matricea de rigiditate astfel obținută, pe lîngă simetria față de diagonala principală, conține foarte mulți coeficienți secundari nuli. În funcție de alcătuirea structurii și de ordinea în care s-a făcut numerotarea nodurilor, coeficienții nenuli, grupați în jurul diagonalei principale, definesc o anumită lățime de bandă, care reflectă conexiunile între elementele finite. În general, în metoda elementelor finite, această lățime este relativ redusă, deoarece pe de o parte numărul nodurilor unui element finit este mic în comparație cu numărul total de noduri și pe de altă parte numărul elementelor care concură într-un nod este și el redus.

Independent de alcătuirea matricei de rigiditate sau uneori simultan cu aceasta, se construiește vectorul termenilor liberi ai sistemului de ecuații (notat cu U în segmentul de program din figura 1.33), în concordanță cu acțiunile exterioare aplicate structurii.

Rezolvarea sistemului de ecuații astfel generat devine posibilă prin anularea gradelor de libertate de corp rigi , adică prin introducerea condițiilor restrictive referitoare la deplasarea nodurilor rezemate ; se ajunge astfel la matricea (1.158'), respectiv la sistemul (1.166). Această operație poate fi făcută în două moduri :

1) Dacă sistemul de ecuație generat este

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \tag{1.168}$$

și condițiile care se pun deplasărilor nodale sînt $r_1=\beta_1$ și $r_3=\beta_3$, în sistemul (1.168) se aduc modificări atît în matricea de rigiditate, cît și în vectorul termenilor liberi, așa cum se poate urmări în sistemul (1.169) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ L_2 - k_{21}\cdot\beta_1 - k_{23}\beta_3 \\ \beta_3 \\ L_4 - k_{41}\beta_1 - k_{43}\beta_3 \end{Bmatrix}. \tag{1.169}$$

2) Termenul k_{ii} de pe diagonala principală, care corespunde deplasării nodale prescrise se multiplică cu un număr foarte mare (de exemplu, 1×10^{40}) ; totodată, termenul astfel obținut, multipli-

Scanned with OKEN Scanner

cat în continuare cu valoarea deplasării impuse, ia locul terménului liber L_i.

Astfel, sistemul (1.168) devine :

$$\begin{bmatrix} k_{11}\times 10^{40} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\times 10^{40} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 k_{11}\times 10^{40} \\ L_2 \\ \beta_3 k_{33}\times 10^{40} \\ L_4 \end{Bmatrix}. \quad (1.170)$$

Dezvoltînd prima ecuație, se poate observa că datorită inegalității evidente

$$k_{1j} \ll k_{11}\times 10^{40},\ j=2,\ 3,\ 4$$

rezultă cu suficientă exactitate cu $r_1=\beta_1$.

Din punctul de vedere al programării la calculator, al doilea procedeu prezintă avantajul unui număr mai redus de operații, putînd fi urmărit pe segmentul de program din figura 1.33, unde s-a notat cu

NBOUN numărul nodurilor cu deplasări prescrise,

NB (I,J) un tablou de tip boolean ; pentru valori nule, nodul I prezintă deplasare prescrisă după direcția X, dacă $J=1$ și după direcția Y dacă $J=2$,

BV(I,J) valoarea deplasării prescrise a nodului I pe direcțiile X, dacă $j=1$ și Y dacă $J=2$.

Procedeele descrise mai sus sînt aplicate în cazul deplasărilor prescrise paralele cu axele sistemului global. Dacă direcțiile deplasărilor impuse sînt înclinate (fig. 1.34), valorilor lor definite în sistemul înclinat r_i^* se transformă în deplasări raportate la sistemul global r_i cu relația de transformare

$$\{r_i\}=[t_i]\{r_i^*\}, \quad (1.171)$$

unde $[t_i]$ este matricea de transformare conținînd cosinușii directori ai axelor X, Y în raport cu axele x^* y^*. Pentru structura întreagă, avînd un număr n_i de reazeme înclinate, relația este

$$\{r\}=[T]\{r^*\}, \quad (1.172)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & [t_i] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [I] \end{bmatrix} \tag{1.173}$$

conține un număr de submatrici egal cu numărul nodurilor, numărul submatricelor $[t_i]$ fiind n_i. Cu (1.173), matricea de rigiditate a structurii și vectorul termenilor liberi se scriu :

$$[K^*]=[T]^T[K][T] \tag{1.174}$$

$$[L^*]=[T]^T\{L\}. \tag{1.175}$$

După rezolvarea sistemului de ecuații, relația (1.172) permite transcrierea deplasărilor nodurilor reazemelor înclinate, din sistemul de axe înclinat în cel global. Procedeul descris mai sus se conduce de obicei la nivelul elementului finit, ocolind operația din (1.174).

Pentru a cunoaște reacțiunile, este necesară partiționarea sistemului de ecuație sub forma

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r_1\} \\ \{r_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{L_1\} \\ \{L_2\} \end{Bmatrix},$$

în care $\{r_1\}$ și $\{r_2\}$ reprezintă vectorul deplasărilor nodurilor libere, respectiv rezemate. Rezolvînd întîi sistemul

$$[K_{11}]\{r_1\}=\{L_1\}-[K_{12}]\ \{r_2\}, \tag{1.177}$$

reacțiunile căutate sînt

$$\{R_2\}=[K_{12}]^T\{r_1\}+[K_{22}]\ \{r_2\}. \tag{1.178}$$

În cazul condițiilor de rezemare omogene, acest calcul se simplifică întrucît $\{r_2\}=0$.

În ceea ce privește rezolvarea sistemului (1.166), în metoda elementelor finite se apelează cu precădere la procedee de rezolvare

Scanned with OKEN Scanner

care ocolesc inversarea directă a matricei de rigiditate, ca, de exemplu, *metoda Gauss-Jordan* sau *metoda pivoților*, *metoda Cholesky*, *rezolvarea în blocuri*, *metode interative* etc.

Este interesant de amintit procedeul Contini [11], de selectare a pivotului în cadrul metodei Gauss-Jordan. În baza acestei tehnici, ca pivot se alege acel element al matricei care conduce la un factor de dominanță

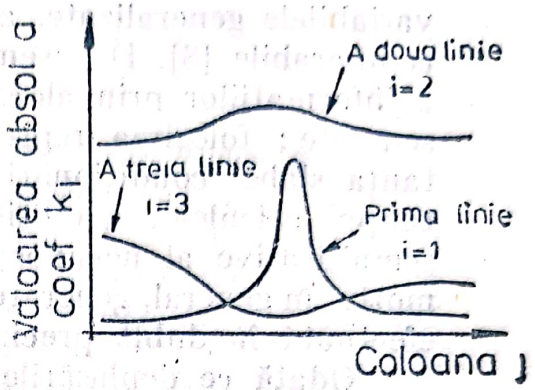


Fig. 1.35.

$$p_i = \frac{k_{imax}}{\sum_{j=1}^{n} |k_{ij}|} \qquad (1.179)$$

maxim. În (1.179) numărătorul este elementul liniei i în valoare maximă, iar n reprezintă numărul de coloane al matricei. Punînd timpul de calcul al unității centrale a calculatorului în relație de proporționalitate cu numărul de operații convenționale, necesare rezolvării unui sistem de N ecuații avînd n cazuri de încărcare, rezultă avantajul metodelor menționate mai sus, în timp ce inversarea propriu-zisă necesită N^3 operații, procedeul de eliminare directă a lui Gauss, un număr de $N^3/3+nN^2-N/3$ operații, iar cel a lui Cholesky și mai puține. În cazul sistemelor de ecuații de dimensiuni mari, unde folosirea memoriilor externe devine absolut necesară, la timpul consumat de unitatea centrală se mai adaugă timpul de transfer al informațiilor între memoria internă și cea externă ; reducerea acestui timp se poate realiza numai printr-o judicioasă organizare a algoritmului de rezolvare.

O problemă majoră legată de alcătuirea și rezolvarea sistemului de ecuații este cea a erorilor numerice și estimarea acestora. O sursă a erorilor în soluțiile sistemului de ecuații poate fi condiționarea nesatisfăcătoare a sistemului, adică dependența cvasiliniară a mai multor ecuații, sau micșorarea excesivă a tuturor coeficienților uneia din ecuații. În metoda elementelor finite, asemenea situații apar atunci cînd unele părți ale structurii sînt foarte rigide în raport cu celelalte, sau cînd în structura își fac apariția mecanisme locale.

O importanță deosebită pentru utilizarea anumitor metode de rezolvare o reprezintă și alegerea unităților în care se exprimă

Scanned with OKEN Scanner

variabilele generalizate, astfel ca ordinele lor de mărime să rezulte comparabile [8]. De asemenea, reprezentarea în memoria centrală a informațiilor prin alocare normală sau dublă are consecințe însemnate; folosirea reprezentării normale poate accentua importanța slabei condiționări a unei matrice, iar prin acumularea în timpul calculelor a erorilor de rotunjire, numărul corect de cifre semnificative al necunoscutelor se micșorează simțitor. Din acest motiv, în general, generarea matricei de rigiditate a structurii trebuie efectuată în dublă precizie.

Odată ce deplasările nodale sînt cunoscute, cu ajutorul relațiilor stabilite în paragrafele 1.3 ... 6 se determină deformațiile specifice, tensiunile sau solicitările unitare pentru fiecare element finit în parte. De exemplu, în cazul elementului finit triunghiular plan avînd șase grade de libertate, cu (1.21) și apoi cu (1.6) se obțin tensiunile σ_x, σ_y și τ_{xy}; utilizînd relațiile cunoscute din problemele plane de elasticitate se pot stabili și tensiunile principale, respectiv direcțiile acestora.

Utilizînd elementul finit triunghiular plan cu șase grade de libertate și bara dublu articulară, autorii au elaborat programele MEF 12 și MEFBAR, ale căror caracteristici sînt inserate în tabelul 1.3. Aceste programe au servit la analiza stării de deformații și eforturi efectuată pe structurile plane prezentate în capitolul 2, în domeniul elastic de comportare.

Tabelul 1.3

	Nr. elemente	Nr. noduri	Nr. partiții	Nr. nod în part.	Nr. nod. reazem	Nr. tip mat.
MEF 12	570	400	40	24	80	3
MEFBAR	450	400	40	24	80	3

Programele menționate sînt redactate în limbaj FORTRAN IV, iar echipamentul de calcul necesitat este:

— memorie internă disponibilă de 100 kb,

— cîte o unitate de disc DIAM pentru discul sistem, discul rezident al bibliotecii de programe (tip IMT) și discul de manevră necesar pentru spațiul de memorie externă,

— lector de cartele,

— imprimantă.

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. Beleș, A., Mihăilescu, C., Mihăilescu S. *Calculul construcțiilor pe terenuri deformabile.* Ed. Academiei R.S.R., București, 1977.
2. Buck, K.E., Scharpf, D.W., Stein, E., Wunderlich, W, *Finite elemente in der Statik. Einführung in die Methode.* Vorträge von einem Kolloquim in Stuttgart, Übersicht über Anwenderprogramme, Verlag von Vilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
3. Căpățînă, D. *Calculatorul în ajutorul proiectării construcțiilor,* Ed. tehnică, București, 1976.
4. Cioclov, D. *Mecanica ruperii materialelor,* Ed. Academiei R.S.R., București, 1977.
5. Desai, C.S., Abel, F.F. *Introdiction to the Finite Element. Anumerical Method for Engineering Analysis.* Van Nostrand Reinhold Company New York, 1972.
6. Grooms, H.R. *Algorithm for Matrix Bandwidth Reduction.* Journal of the Structural division ST1. vol. 98, 1972.
7. Huebner, H.K. *The Finite Element Method for Engineers,* John Wiley&Sons, New York, 1974.
8. Massonet, Ch. și colab. *Calculul structurilor la calculatoare electrionice,* (trad. din lb. franceză) Ed. tehnică, București, 1974.
9. Olteanu, N.G., Pârvu, E.A. *Metode de discretizare a continuului în vederea rezolvării diferitelor tipuri de probleme de mecanică.* Vol. II, Institutul național de informare și documentare științifică și tehnică, 1972.
10. Rodriques, J.S. *Node Numbering Optimization in Structural Analysis.* Journal of the Structural Division ST2, vol, 101, 1975.
11. Robinson. J. *Integrated Theory of Finite Element Methods.* John Wiley&Sons London, 1973.
12. Sandi, H. *Metode matriceale în mecanica structurilor,* Ed. tehnică, București, 1976.
13. Teodorescu. P.P. *Probleme plane în teoria elasticității,* Vol. I, Ed. Academiei R.S.R., București, 1961.
14. Zienkiewicz, O.C. *The Finite Elemente Methode in Engineering Science,* Mc. Graw-Hill, London, 1971.
15. * * * *A general structural Analyses Program SAP-IV* (Manual de utilizare), University of California, Berkeley, 1971.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

Exemple de aplicare a elementelor finite în unele probleme inginereşti

2.1. PRELUCRAREA REZULTATELOR OBŢINUTE LA CALCULATOR

În metoda de calcul cu elemente finite, dimensionarea sau verificarea unei structuri de rezistenţă sau parte de structură constă în înlocuirea corpului continuu cu un ansamblu de elemente discrete legate între ele şi verificarea separat a fiecărui element. În acest fel, cîmpul continuu, real, de deformaţii şi tensiuni este substituit cu un cîmp de valori ce prezintă discontuităţi ale tensiunilor sau ale deformaţiilor la limita dintre elementele finite. Această discontinuitate se manifestă cu pregnanţă în cazul utilizării elementelor finite simple ae tipul triunghiului plan, cu 6 grade de libertate. Cantitatea de informaţii furnizată de calculator este foarte mare, fapt dependent direct de numărul elementelor finite, deci de desimea reţelei de elemente finite. Astfel, pentru problemele plane, pe imprimantă sînt înregistrate valorile algebrice ale eforturilor unitare σ_x, σ_y, τ_{xy} şi principale σ_1, σ_2, precum şi direcţia tensiunii σ_1 pentru fiecare element finit. De asemenea, pentru fiecare nod al structurii asamblate se dau valorile algebrice ale deplasărilor. Pe de altă parte, pentru inginerul proiectant este importantă obţinerea unor informaţii dependente de aspectul

Scanned with OKEN Scanner

continuu, real al corpului sau structurii respective. Astfel, este utilă obținerea unor curbe continue de variație a eforturilor unitare în anumite secțiuni ale structurii, în multe situații fiind necesară și trasarea izostaticelor. Desigur, utilizarea unei rețele fine, respectiv a unui număr foarte mare de elemente finite reduce discrepanța între caracterul discontinuu al informațiilor obținute de la calculator și alura continuă a curbelor de eforturi unitare sau a izostaticelor. Acest lucru nu este posibil însă întodeauna, mai ales în cazurile unor gradienți mari ai variației eforturilor unitare, cum e cazul concentratorilor. De asemenea, un număr foarte mare de elemente implică unele dezavantaje, menționate în cap. 1. Utilizarea unor elemente finite mai complexe pe lîngă unele dificultăți în alcătuirea mărimilor caracteristice (vezi cap. 1) prezintă avantajul reducerii discrepanței de discontinuitate. Unele unități de calcul sînt dotate cu periferice înregistratoare tip PLOTTER, care scutesc pe utilizator de munca de trasare a direcțiilor eforturilor unitare, însă și în acest caz este necesară o prelucrare atentă din partea utilizatorului, avînd în vedere că aceste înregistrări grafice ale PLOTTER-ului nu pot fi considerate drept definitive sau cel puțin aproximative, decît în măsura în care problema respectivă a cuprins un număr foarte mare de elemente finite, Ca orientare, se poate aproxima că pentru o secțiune transversală într-o grindă sau stîlp sînt necesare cca 8 elemente finite triunghiulare (intersectate de secțiune) pentru a trasa direct curba de efort unitar σ_x (σ_y) sau τ_{xy} cu o eroare sub 6% ; pentru o secțiune într-o grindă perete sînt necesare cca 16 elemente finite intersectate, ceea ce ar conduce pentru o structură mai complexă la un număr de sute sau chiar mii de elemente finite. Pentru cazurile obișnuite, cu programele existente este mai convenabilă alegerea unui număr mai redus de elemente finite și în consecință „ajustarea" datelor obținute.

Se va analiza în primul rînd ajustarea curbei de variație a eforturilor unitare pe secțiuni drepte făcute prin structură. În figura 2.1 se indică două situații, *a* și *b*, în care diagrama efortului unitar s-ar înscrie într-o variație liniară.

Pentru cazul din figura 2.1a, se determină, prin calcul manual, mărimea :

$$S_0 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \cdot \Delta a_i \cdot t_i, \qquad (2.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

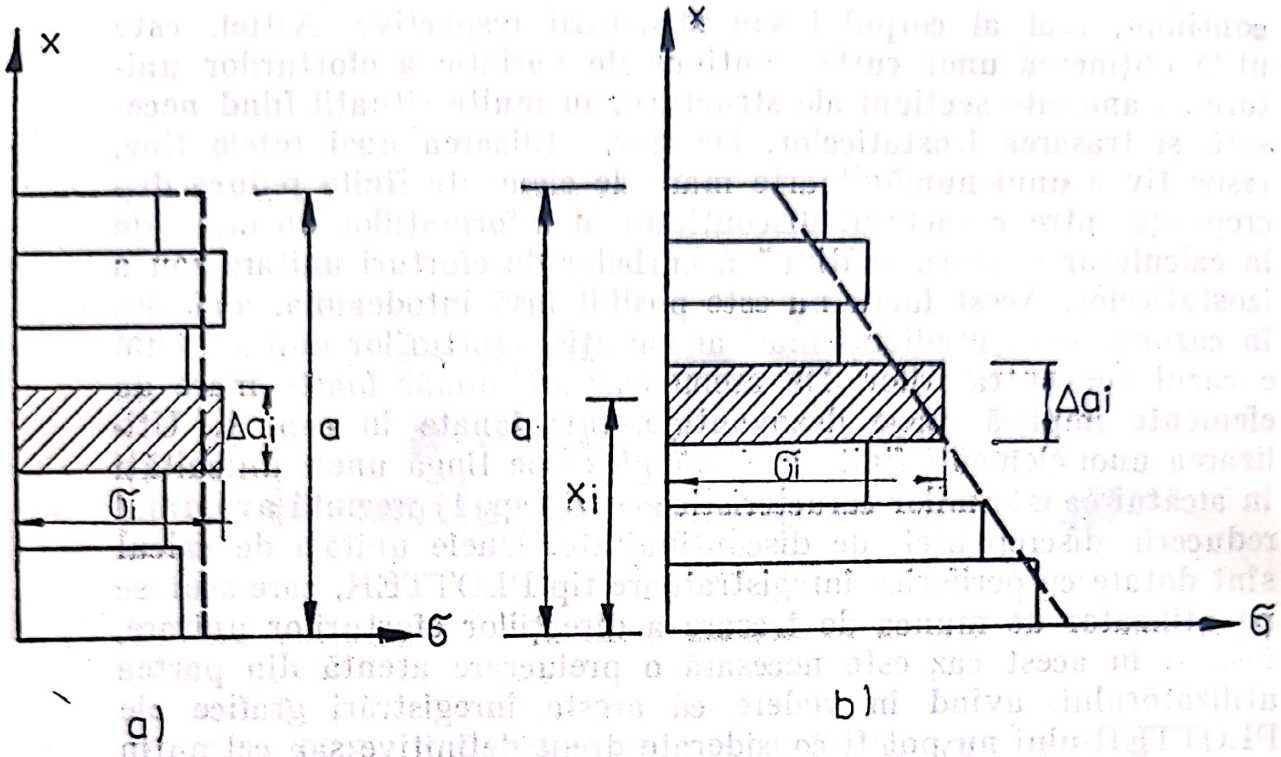


Fig. 2.1.

iar apoi din condiția de echilibru

$$\sigma_0 \cdot a = S_0 \tag{2.2}$$

rezultă valoarea efortului mediu σ_0.

Pentru cazul din figura 2.1b este necesară și calcularea mărimii S_1:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \cdot x_i \cdot \Delta a_i \cdot t_i. \tag{2.3}$$

Efortul unitar „mediat" pe secțiune are o variație liniară

$$\sigma = c_0 + c_1 \cdot x. \tag{2.4}$$

Din condițiile de echivalare a rezultatelor, rezultă :

$$\int_0^a \sigma \cdot t \cdot dx = S_0, \tag{2.5 a,b}$$

$$\int_0^a \sigma \cdot x \cdot t \, dx = S_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind relația (2.4) în (2.5 a,b) se obțin valorile lui c_0 și c_1

$$c_0 = \frac{4}{a} \cdot S_0 - \frac{6}{a^2} \cdot S_1,$$

$$c_1 = -\frac{6}{a^2} \cdot S_0 + \frac{12}{a^3} \cdot S_1. \qquad (2.6\ a,b)$$

Pentru cazul din figura 2.2, în care variația efortului unitar s-ar înscrie pe o curbă, se încearcă o variație de tipul

$$\sigma = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \qquad (2.7)$$

în care caz este necesară, pe lîngă valorile S_0 și S_1 și determinarea lui S_2, astfel :

$$S_2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i x_i^2 \cdot t_i \cdot \Delta a_i. \qquad (2.8)$$

Punînd condițiile de echivalare a ariilor și momentelor statice de ordinul 1 și 2, pentru diagrama discontinuă și cea continuă

$$\int_0^a \sigma dx = S_0\,; \quad \int_0^a \sigma \cdot x dx = S_1\,; \quad \int_0^a \sigma x^2 dx = S_2 \qquad (2.9\ a,\ b,\ c)$$

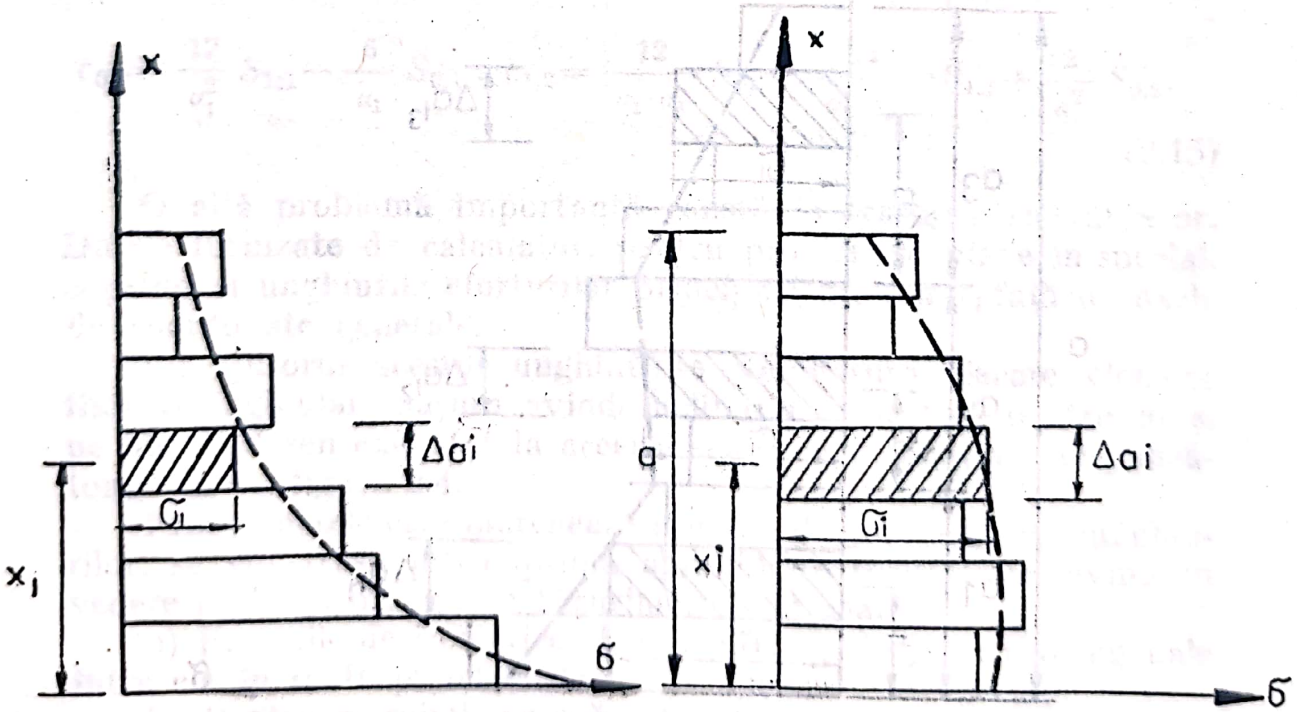


Fig. 2.2.

se obțin valorile lui c_0, c_1, c_2, astfel :

$$c_0 = \frac{9}{a} S_0 - \frac{36}{a^2} \cdot S_1 + \frac{30}{a^3} \cdot S_2$$

$$c_1 = -\frac{36}{a^2} \cdot S_0 + \frac{192}{a^3} \cdot S_1 - \frac{180}{a^4} \cdot S_2 \qquad (2.10\ a,b,c)$$

$$c_2 = \frac{30}{a^3} \cdot S_0 - \frac{180}{a^4} S_1 + \frac{180}{a^5} \cdot S_2.$$

Pentru cazurile în care diagrama de eforturi unitare s-ar înscrie într-o curbă cu puncte de inflexiune, ca în figuira 2.3, este posibilă utilizarea pentru expresia efortului unitar a unui polinom de grad superior, dar calculele necesare ulterioare ar deveni prea extinse, încît se recomandă alt procedeu și anume :

Se subîmparte lungimea „a" a secțiunii în subintervale a_1, a_2, . . ., a_n, determinîndu-se pentru fiecare interval o variație liniară.

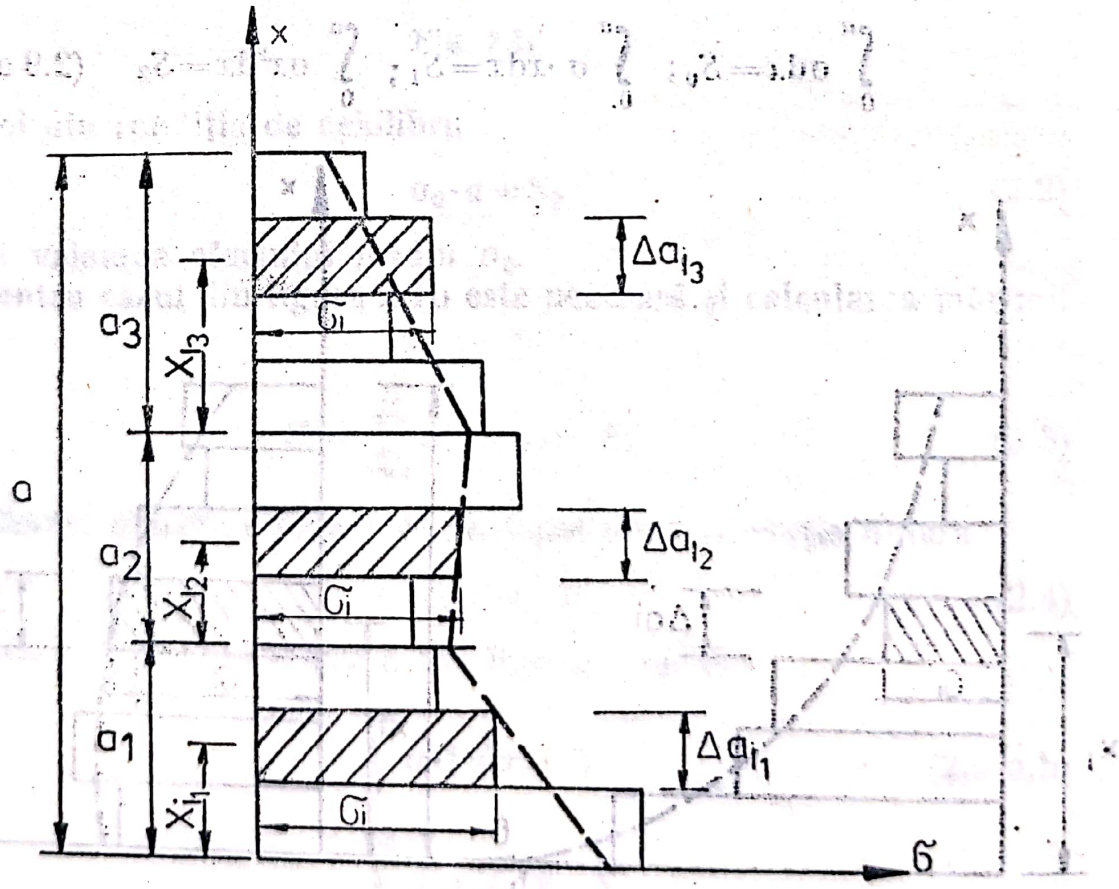


Fig. 2.3.

Pentru cazul a trei subintervale, conform figurii 2.3, vor exista trei moduri de variație a efortului unitar :

$$\sigma_1 = c_{0,1} + c_{1,1}x_1 \; ; \quad \sigma_2 = c_{0,2} + c_{1,2}x_2 \; ; \quad \sigma_3 = c_{0,3} + c_{1,3}x_3. \tag{2.11}$$

Se vor determina în continuare mărimile :

$$S_{0,1} = \sum \sigma_{i,1} \cdot \Delta a_{i1} t \; ; \quad S_{0,2} = \sum \sigma_{i,2} \Delta a_{i2} t \; ; \quad S_{0,3} = \sum \sigma_{i,3} \Delta a_{i3} t. \tag{2.12}$$

Din condiția de egalitate a efortului unitar la limita între subintervale, se obține :

$$c_{0,1} + c_{1,1}a_1 = c_{0,2} \; ; \quad c_{0,2} + c_{1,2}a_2 = c_{0,3}. \tag{2.13}$$

Relațiile (2.12) și (2.13) nefiind suficiente pentru determinarea coeficienților $c_{0.1} \ldots c_{1.3}$, se va determina în plus valoarea lui $S_{1,1}$ pentru un subinterval, astfel

$$S_{1,1} = \sum \sigma_{i1} \cdot x_{i1} \cdot \Delta a_{i1} \cdot t. \tag{2.14}$$

Echivalînd diagrama discontinuă a efortului unitar cu cea dată de relațiile (2.11), se obțin valorile coeficienților

$$c_{0,1} = \frac{4}{a_1} S_{0,1} - \frac{6}{a_1^2} S_{1,1} \; ; \quad c_{1,1} = \frac{12}{a_1^3} S_{1,1} - \frac{6}{a_1^2} \cdot S_{0,1}$$

$$c_{0,2} = \frac{12}{a_1^2} S_{1,1} - \frac{6}{a_1} S_{0,1} \; ; \quad c_{1,2} = \frac{12}{a_1 \cdot a_2} S_{0,1} - \frac{24}{a_1 \cdot a_2} \cdot S_{1,1} + \frac{2}{a_1^2} S_{0,2}. \tag{2.15}$$

O altă problemă importantă constă în trasarea izostaticelor. Datele furnizate de calculator, pentru problemele plane în special, cuprind și unghiurile eforturilor principale σ_1, sau σ_2 față de axele de coordonate generale.

Cu ajutorul acestor unghiuri se va haşura fiecare element finit tr unghiular, haşura avînd înclinația respectivă pentru σ_1 și pe un alt desen executat la aceeași scară cu înclinația corespunzătoare lui σ_2, figura 2.4.

Prin punctele care marchează centrele de greutate ale triunghiurilor, se vor trasa într-o primă aproximare izostaticele, avînd în vedere pe lîngă orientarea haşurilor și următoarele :

a) Familiile de izostatice ale efortului σ_1 și σ_2 vor fi ortogonale între ele în toate punctele de intersecție ;

b) Pentru marginile neîncărcate, conturul acestora va constitui o izostatică, cealaltă fiind normală la linia conturului.

Scanned with OKEN Scanner

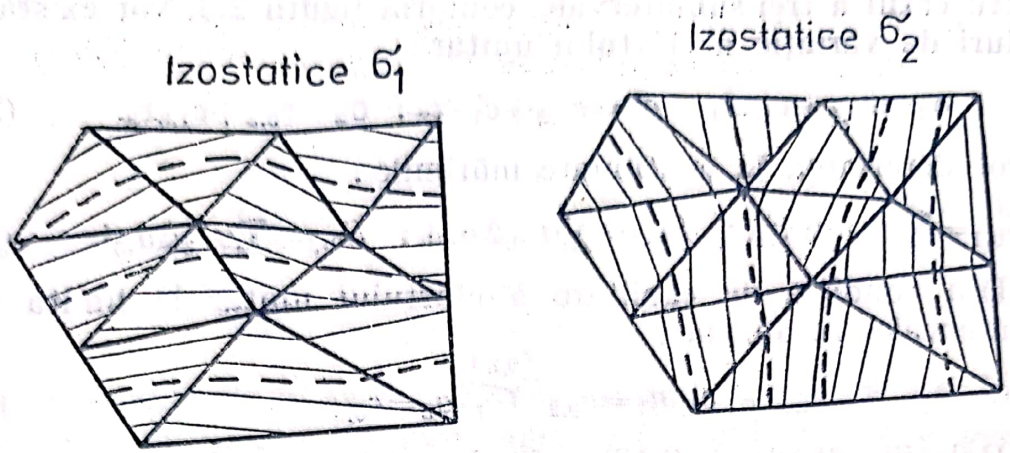


Fig. 2.4.

c) Punctele de pe contur în care acționează o încărcare concentrată sînt *puncte singulare* (izotrope) convergente, în care concurează mai multe izostatice.

d) În cazul unui număr mai mare de elemente finite și a unui cîmp de eforturi fără gradienți prea mari, izostaticele se pot trasa mai exact trasînd mai întîi izoclinele (curbele în a căror puncte efortul unitar are aceeași înclinație). Pentru cazurile curente se poate admite pe o aceeași izoclină puncte ale căror înclinare a efortului principal nu diferă cu mai mult de $\pm 3^0$.

Trasarea izostaticelor se va face în felul următor:

Pe o axă Oy_1 paralelă cu axa sistemului de coordonate Oy se aleg puncte echivalente $P1$, $P2$, ... Pn. Din punctul $P1$ se duce o dreaptă cu înclinația (față de axa Ox_1)α_1 parametrul izoclinei α_1. Din punctul A situat pe această dreaptă și la mijlocul intervalului între izoclinele α_1 și α_2 (fig, 2.5) se duce o altă dreaptă care are înclinația α_2 și care în mod similar va determina punctul B ș.a.m.d. Înfășurătoarea acestor drepte este o izostatică. Cealaltă familie de izostatice se obține ducînd curbe ortogonale pe izostaticele trasate ca mai sus.

O cauză care contribuie substanțial la dificultatea de trasare a izostaticelor în anumite regiuni ale structurii o constituie prezența punctelor singulare „divergente"; existența acestora este cauzată de prezența unei încărcări concentrate în vecinătate sau de o discontinuitate a încărcării, precum și de prezența unor discontinuități fizice sau geometrice (goluri). Deoarece prin metoda de calcul cu elemente finite se obțin valori mediate pe cuprinsul unui

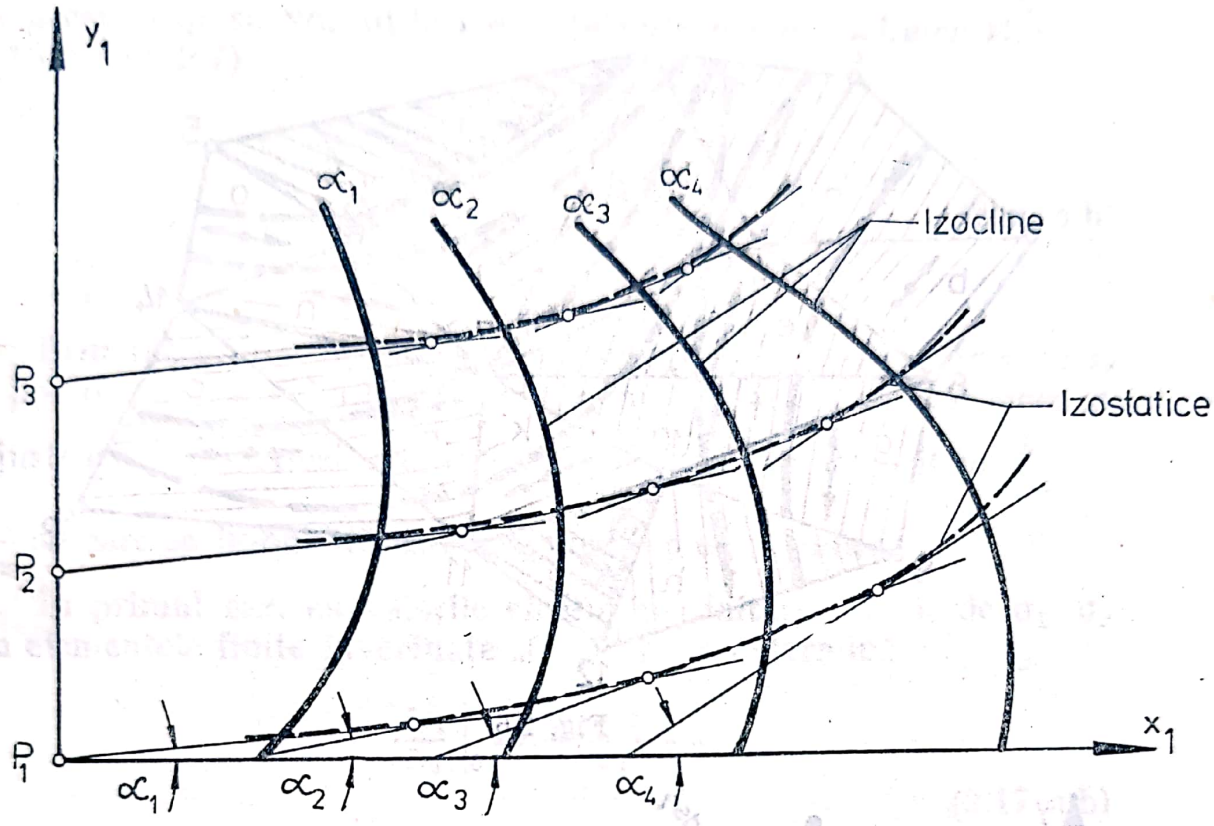


Fig. 2.5.

element finit existența acestor puncte singulare nu poate fi evidențiată cu această metodă. Totuși unele informații se pot obține din dispunerea hașurilor în elementele finite. Astfel, în figura 2.6 elementul finit „l" are hașurile (înclinația lui σ_1) dispuse într-un mod care nu se „leagă" fluent cu restul izostaticelor, putînd fi suspectat de prezența în cuprinsul său a unui punct singular „divergent". O informație deosebit de valoroasă în acest sens poate fi furnizată de studiul foto-elastic, în care punctele singulare sînt puse în evidență de izocromatele de ordin zero.

În multe din cazurile curente trasarea izostaticelor conform celor expuse mai sus este calitativ acceptabilă pentru scopurile proiectării. În cazul cînd se necesită un studiu mai exact al stării de eforturi unitare, sau în cazul unor cîmpuri de tensiuni cu variații mari, datorită unor discontinuități fizice sau de încărcare, este necesar ca trasarea izostaticelor să fie îmbunătățită. De asemenea și variația efortului unitar în lungul izostaticei poate fi ameliorată.

Scanned with OKEN Scanner

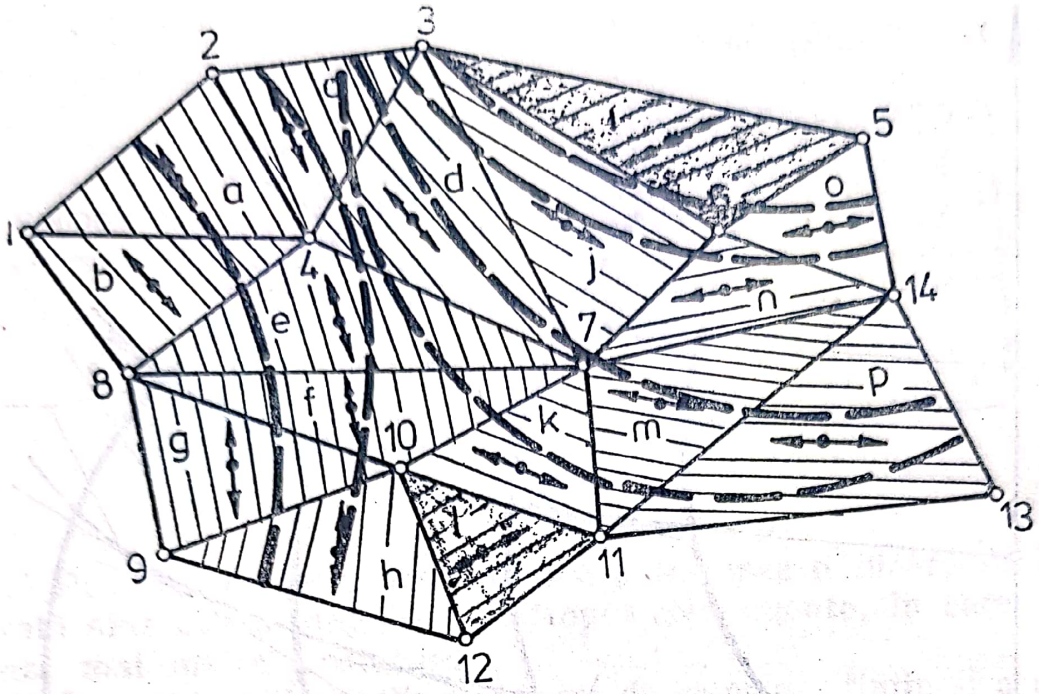


Fig. 2.6.

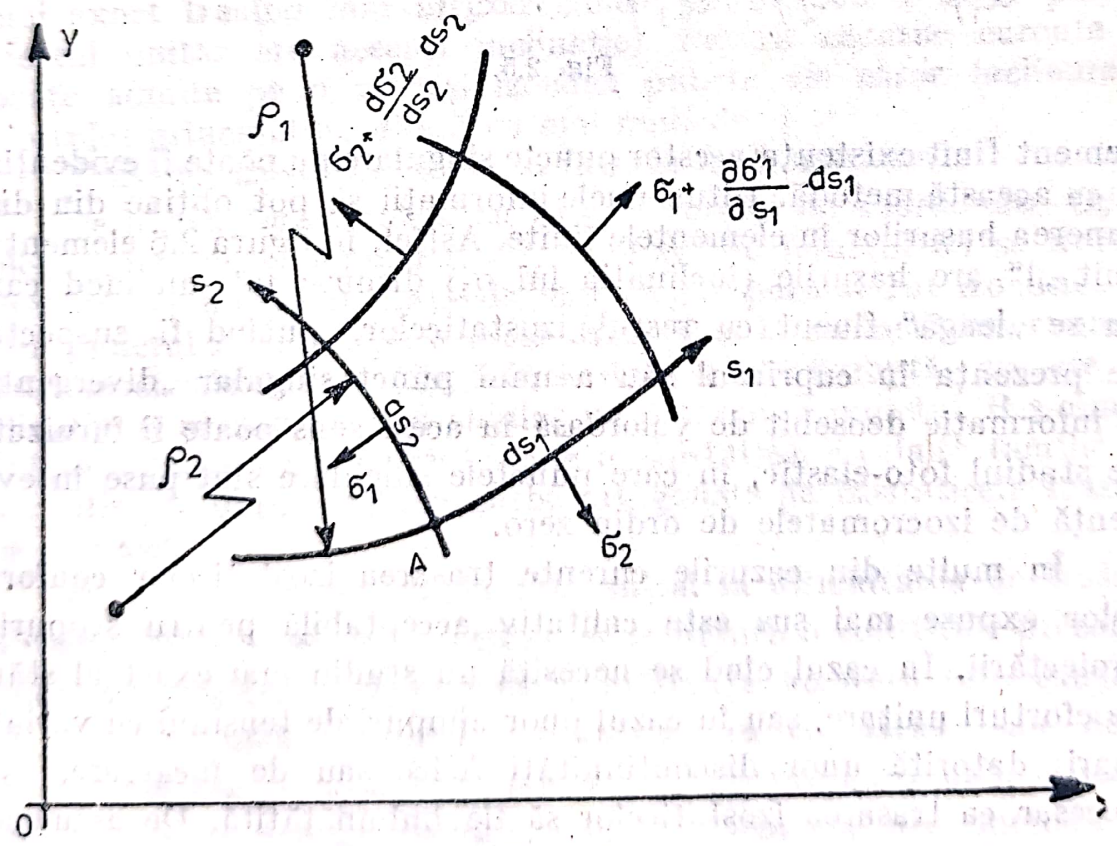


Fig. 2.7.

Scanned with OKEN Scanner

În acest scop se vor utiliza ecuațiile de echilibru Lame-Maxwell (2.16) ; (fig. 2.7)

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0. \qquad (2.16\ a,b)$$

Prin integrarea acestor ecuații în lungul izostaticelor s_1 si s_2 se pot obține fie valorile razelor de curbură ρ_1. ρ_2 cu care apoi se „ajustează" izostaticele respective, fie valorile derivatelor $\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}$ și $\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2}$ cu care se îmbunătățește diagrama de efort unitar.

În primul caz, cu valorile eforturilor unitare principale σ_1, σ_2 din elementele finite învecinate „0" și „1" se determină

$$\left.\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}\right|_0 = \frac{\sigma_{1,1} - \sigma_{1,0}}{\Delta s_1}$$

$$\left.\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2}\right|_0 = \frac{\sigma_{2,1} - \sigma_{2,0}}{\Delta s_2}, \qquad (2.17\ a,b)$$

iar apoi se determină curburile în punctul 0

$$\left.\frac{1}{\rho_1}\right|_0 = -\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \cdot \frac{1}{\sigma_{1,0} - \sigma_{2,0}}$$

$$\left.\frac{1}{\rho_2}\right|_0 = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \cdot \frac{1}{\sigma_{1,0} - \sigma_{2,0}}. \qquad (2.18\ a,b)$$

În aceste relații s-a notat cu :

$\sigma_{1,0}$; $\sigma_{2,0}$ — eforturile unitare principale în elementul finit „0" ;

$\sigma_{1,1}$; $\sigma_{2,1}$ — eforturile unitare principale în elementul finit „1".

Cu valorile curburilor astfel obținute se vor trasa arce de cerc cu razele ρ_1, respectiv ρ_2 tangente în centrul elementului finit „0" la direcția înclinării efortului σ_1, respectiv σ_2, fig. 2.8. Semnul curburilor $1/\rho_1$ și $1/\rho_2$ va indica de care parte a izostaticei se dispune centrul de curbură, curbura pozitivă fiind cea cu concavitățile în direcția pozitivă a axei OY .Trasarea se poate efectua mai ușor utilizînd florare gradate.

Scanned with OKEN Scanner

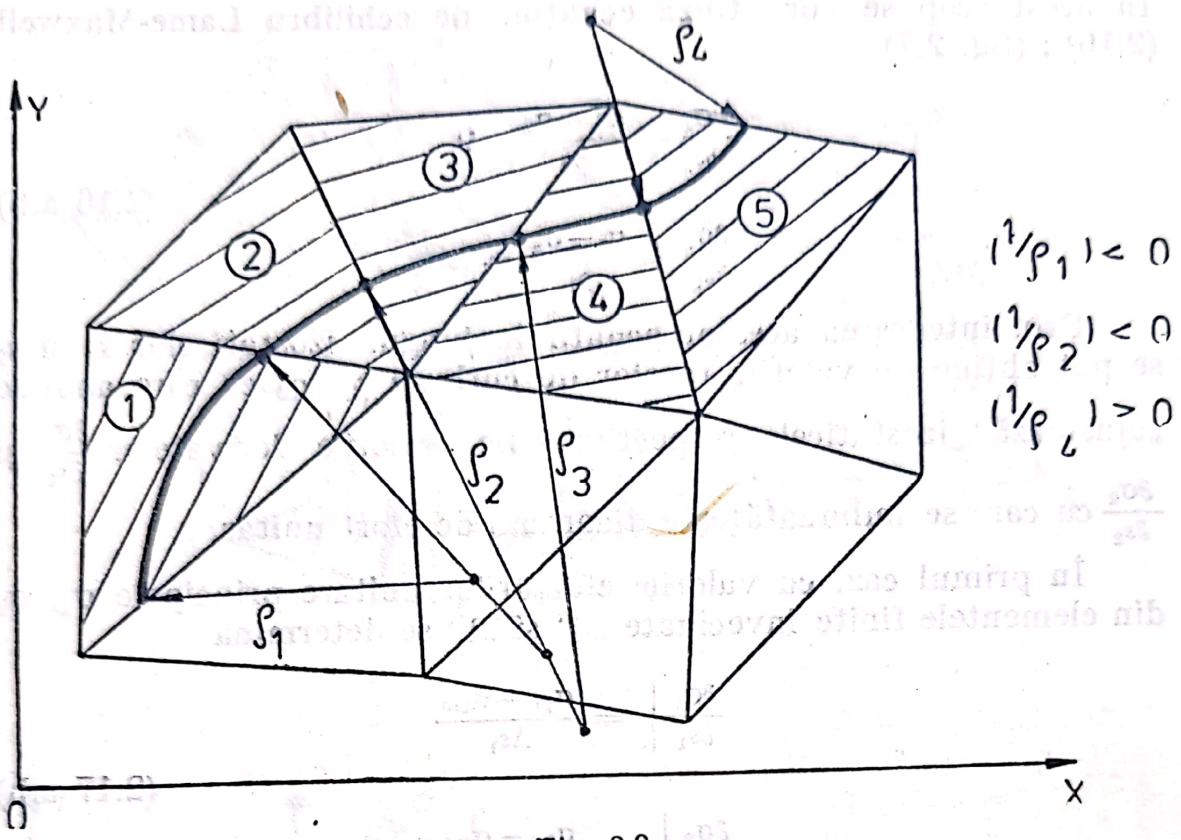


Fig. 2.8.

În al doilea caz cînd se consideră că traseul izostaticelor este corect, se subîmparte segmentul de izostatică între două elemente finite printr-un punct A. Prin integrarea ecuației (2.17 a) se obține:

$$\int_0^A \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \cdot ds_1 = -\int_0^A \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} \cdot ds_1 \qquad (2.22\ a, b)$$

sau

$$\sigma_1\Big|_A = \sigma_1\Big|_0 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2}\Big|_0 .$$

Pentru trasarea variației efortului unitar în lungul izostaticei, de o mare utilitate este existența familiei de izocline cu ajutorul cărora se pot determina punctele de efort unitar maxim, utilizînd teorema lui Mesnager, conform căreia *un efort unitar principal are un maxim în punctele în care izostatica și izoclina corespunzătoare se intersectează în unghiu drept.* Un caz deosebit îl constituie ajus-

Scanned with OKEN Scanner

tarea curbei de efort unitar în lungul unei axe de simetrie ce trece printr-o crestătură sau gaură, deci în zonele cu concentratori de tensiune.

2.2. EXEMPLUL 1. DIAFRAGMĂ TRANSVERSALĂ LA STRUCTURA UNEI CLĂDIRI DE LOCUIT CU PARTER ELASTIC

Realizarea unor clădiri de locuit din panouri mari, în regim de înălțime P+4 etaje, avînd la nivelul parterului spații comerciale, a impus studierea din punctul de vedere al rezistenței a structurii din figura 2.9, alcătuită din diafragma transversală cu două șiruri de goluri pe nivelurile 1 la 4 și un cadru de beton armat monolit cu două deschideri la nivelul parterului.

Pentru investigarea comportării structurii la acțiunea încărcărilor verticale și orizontale (din seism), este indicată o analiză în stadiul de rupere sau post-elastic. Totuși, chiar un studiu în stadiul elastic este foarte util, avînd în vedere că zonele în care apar eforturi uni-

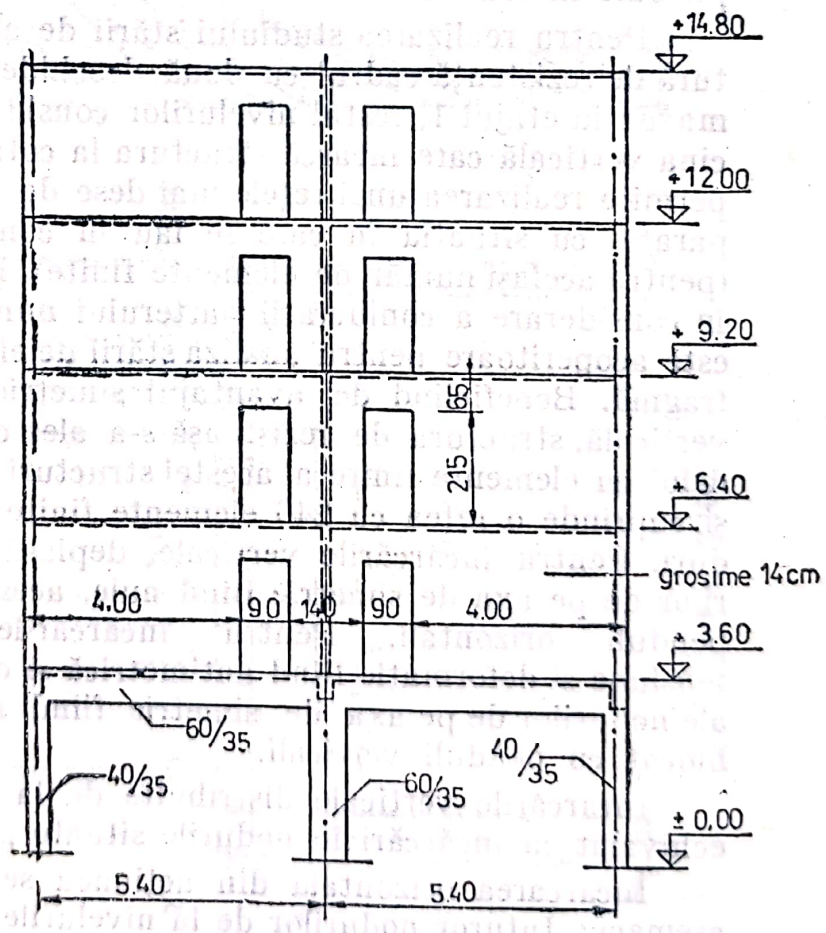


Fig. 2.9.

tare de valori ridicate, sînt cele la care trebuie luate măsuri de armare sau dimensionarea pentru limitarea fisurării și prevenirea cedărilor.

Studiul stării de tensiune trebuie să răspundă următoarelor probleme mai importante :

a) Cadrul monolit de la nivelul parterului este solicitat similar cu un cadru încărcat cu sarcina verticală adusă de cele 4 nivele, sau există o conlucrare cu restul diafragmei și în ce măsură ?

b) Panourile care formează diafragma de la nivelul etajului 1 sînt solicitate mai puternic decît în cazul clădirilor cu panouri mari la toate nivelurile ?

c) La încărcările orizontale, stîlpii parterului se vor comporta ca fiind încastrați în diafragmă sau ca făcînd parte din cadrul monolit, neconlucrînd cu diafragma ?

d) Pentru încărcări orizontale, diafragma la nivelul etajului 1 este solicitată suplimentar față de situația curentă a clădirii cu panouri la toate nivelurile ?

Pentru realizarea studiului stării de eforturi s-a ales ca structură de rezistență cadrul cu două deschideri conlucrînd cu diafragma de la etajul 1, restul nivelurilor considerîndu-se numai prin sarcina verticală care încarcă structura la cota +6,40. Această ipoteză permite realizarea unei rețele mai dese de elemente finite în comparație cu situația în care se iau în considerare toate nivelurile (pentru același număr de elemente finite). Pe de altă parte, luarea în considerare a conlucrării parterului numai cu nivelul etajului 1 este acoperitoare pentru analiza stării de eforturi în cadru sau diafragmă. Beneficiind de avantajul simetriei structurii față de axa verticală, structura de rezistensă s-a ales conform figurii 2.10. Modelul cu elemente finite al acestei structuri este indicat în figura 2.11 și cuprinde o rețea cu 246 elemente finite triunghiulare și 167 noduri. Pentru încărcările verticale, deplasările orizontale ale nodurilor de pe axa de simetrie fiind nule, aceste noduri s-au blocat cu penduli orizontali. Pentru încărcările orizontale, starea de tensiune și deformație fiind antimetrică și deci deplasările verticale ale nodurilor de pe axa de simetrie fiind nule, aceste noduri s-au blocat cu penduli verticali.

Încărcările verticale distribuite de la cotele 3,60 și 6,40 s-au echivalat cu încărcări în nodurile situate pe aceste linii.

Încărcarea orizontală din acțiunea seismică s-a distribuit de asemenea tuturor nodurilor de la nivelurile 3,60 și 6,40 (încărcarea

Scanned with OKEN Scanner

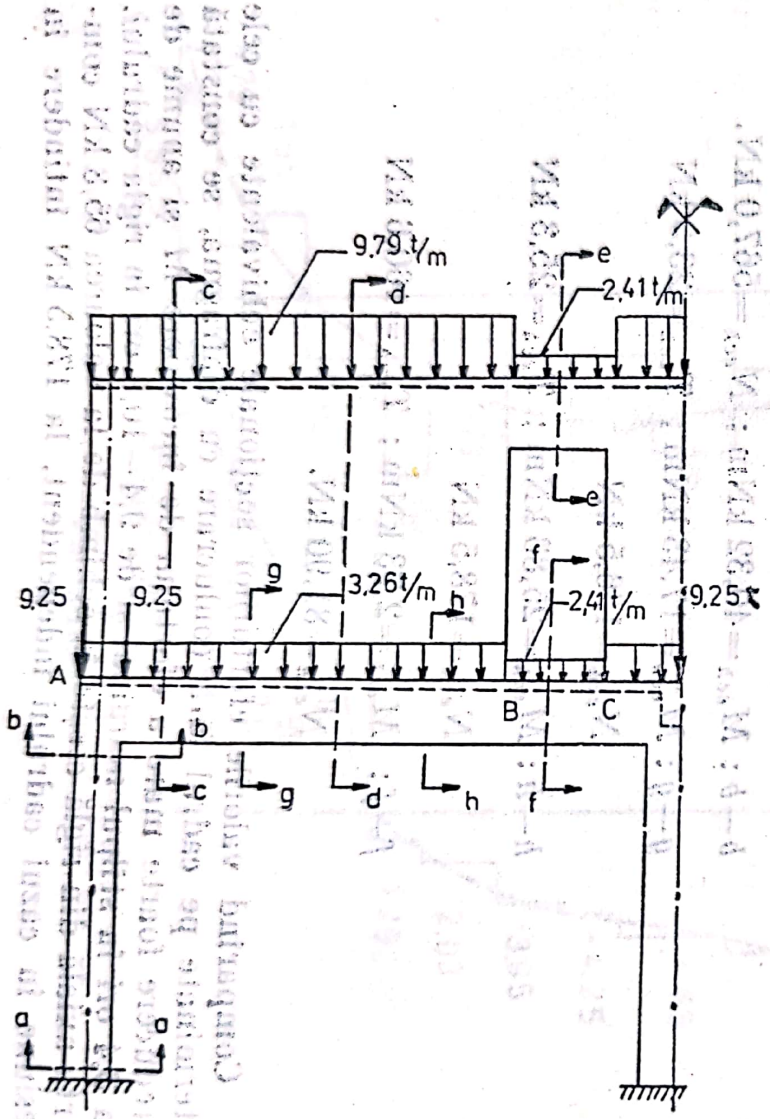


Fig. 2.10.

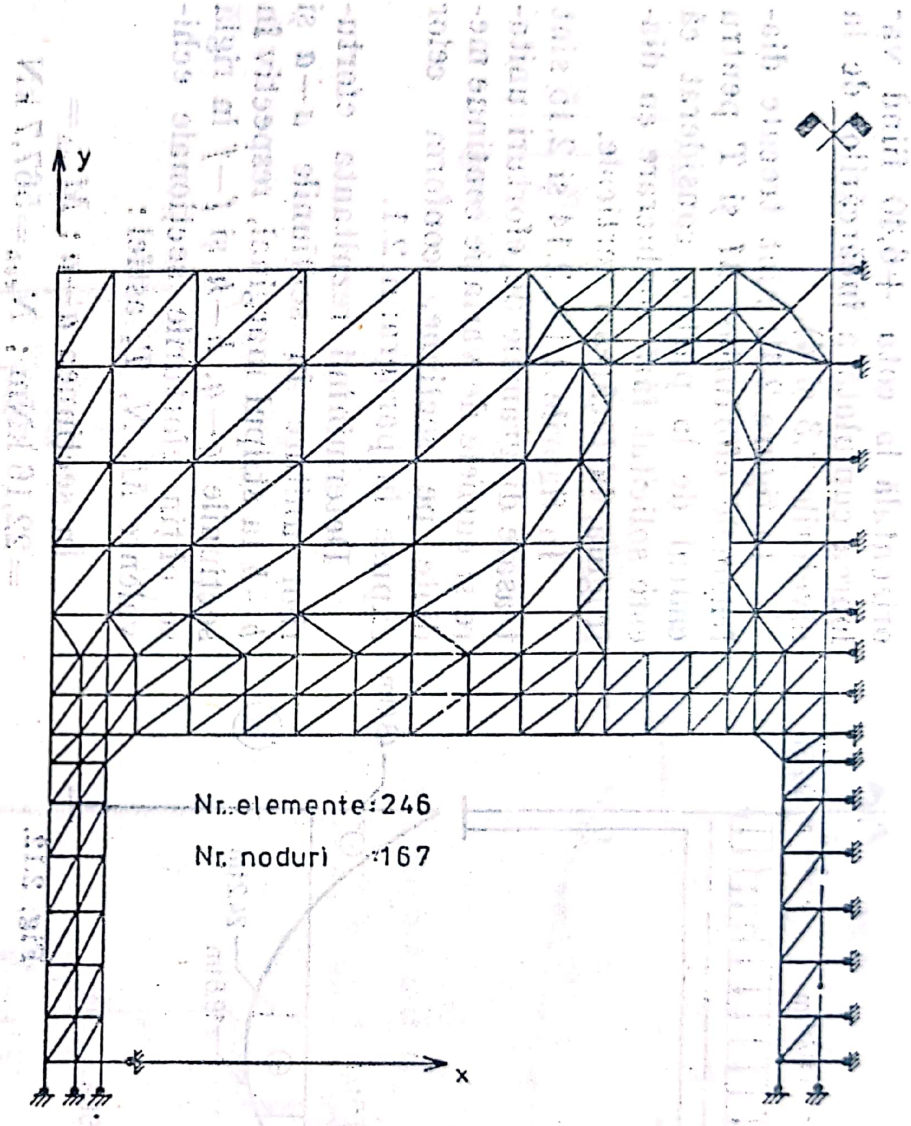


Fig. 2.11.

Scanned with OKEN Scanner

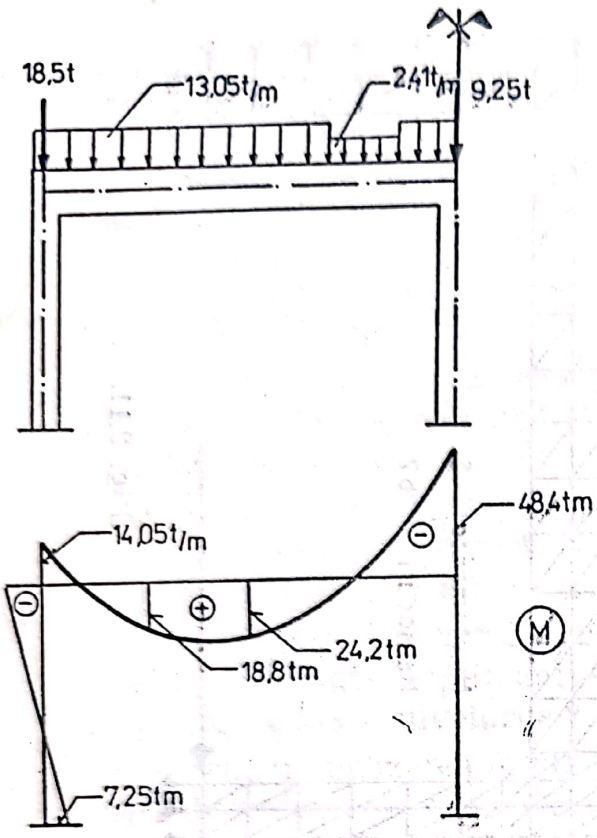


Fig. 2.12.

orizontală la cota +6,40 fiind valoarea cumulată a încărcărilor de la nivelurile 2,3 și 4).

În figura 2.12 sînt trecute diafragmele eforturilor M și T pentru cadrul de la parter, considerat că este solicitat fără conlucrare cu diafragma, la încărcări verticale.

În figurile 2.13, 2.14 și 2,15 sînt trasate diagramele de eforturi unitare și curbele de variație continue mediate pe secțiune, conform celor expuse în paragraful 2.1.

Determinînd rezultanta eforturilor unitare în secțiunile $a-a$ și $b-b$ la stîlpul marginal, respectiv în secțiunile $g-g$, $h-h$ și $f-f$ în riglă se obțin eforturile secționale echivalente M, N, T, astfel:

În secțiunea $a-a$: $M_{ech}=22{,}16$ kNm; $N_{ech}=567{,}7$ kN

$b-b$: $M_{ech}=40{,}32$ kNm; $N_{ech}=567{,}0$ kN.

$g-g$: $M_{ech}=17{,}43$ kNm; $T_{ech}=23{,}3$ kN

$N_{ech}=136{,}5$ kN

$h-h$: $M_{ech}=25{,}83$ kNm; $T_{ech}=25{,}3$ kN

$N_{ech}=178{,}5$ kN

$f-f$: $M_{ech}=2{,}73$ kNm; $T_{ech}=160{,}6$ kN

$N_{ech}=81{,}90$ kN.

Comparînd valorile eforturilor secționale echivalente cu cele determinate pe cadrul fără conlucrare cu diafragma, se constată o reducere foarte mare a efortului de încovoiere M și anume de cca 3,4 ori în stîlpul marginal și de 9,4—10,8 ori în rigla cadrului. Forța axială din riglă crește în schimb de la valoarea 65,8 kN compresiune în cazul cadrului independent, la 178,5 kN întindere în

Scanned with OKEN Scanner

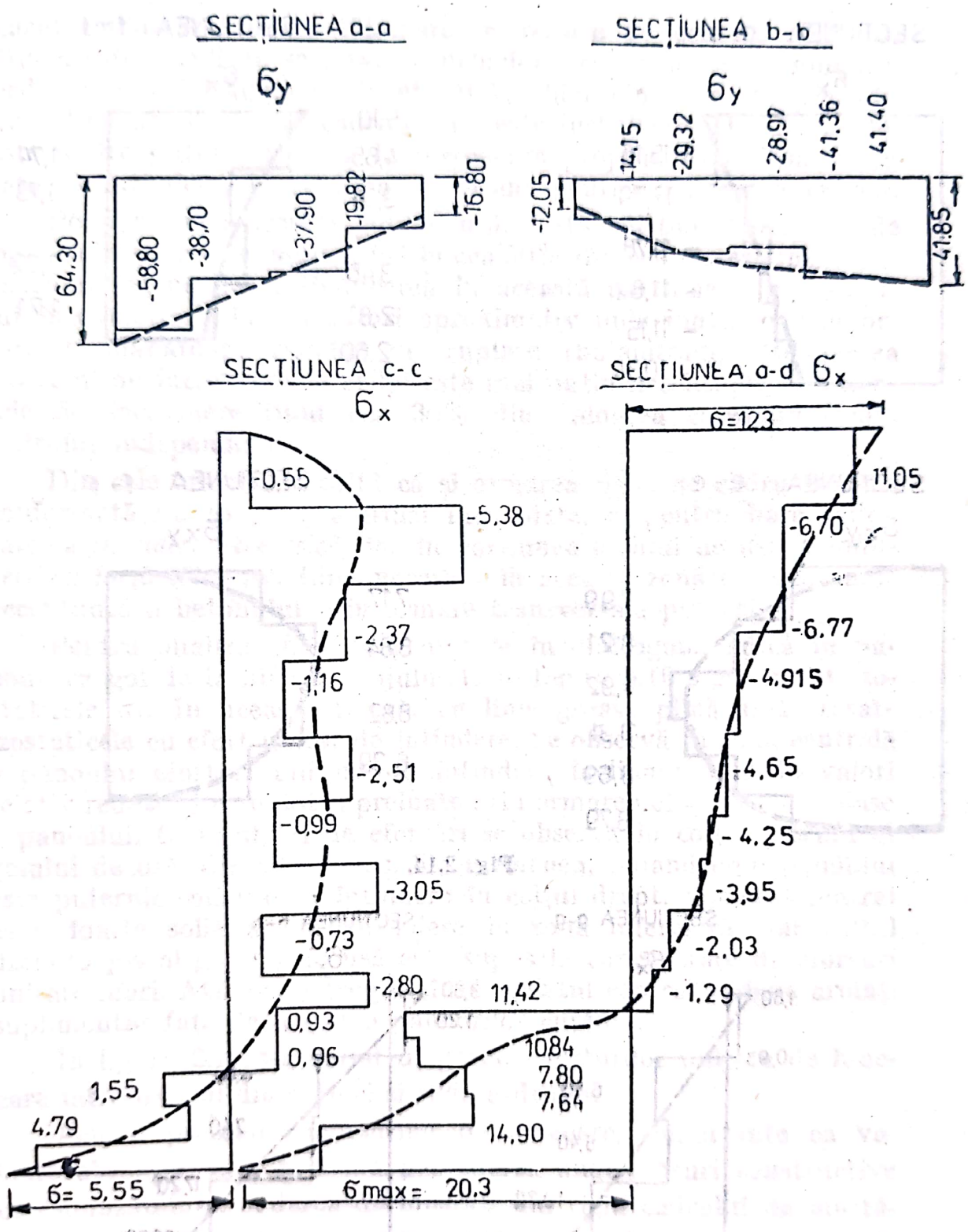


Fig. 2.13.

Scanned with OKEN Scanner

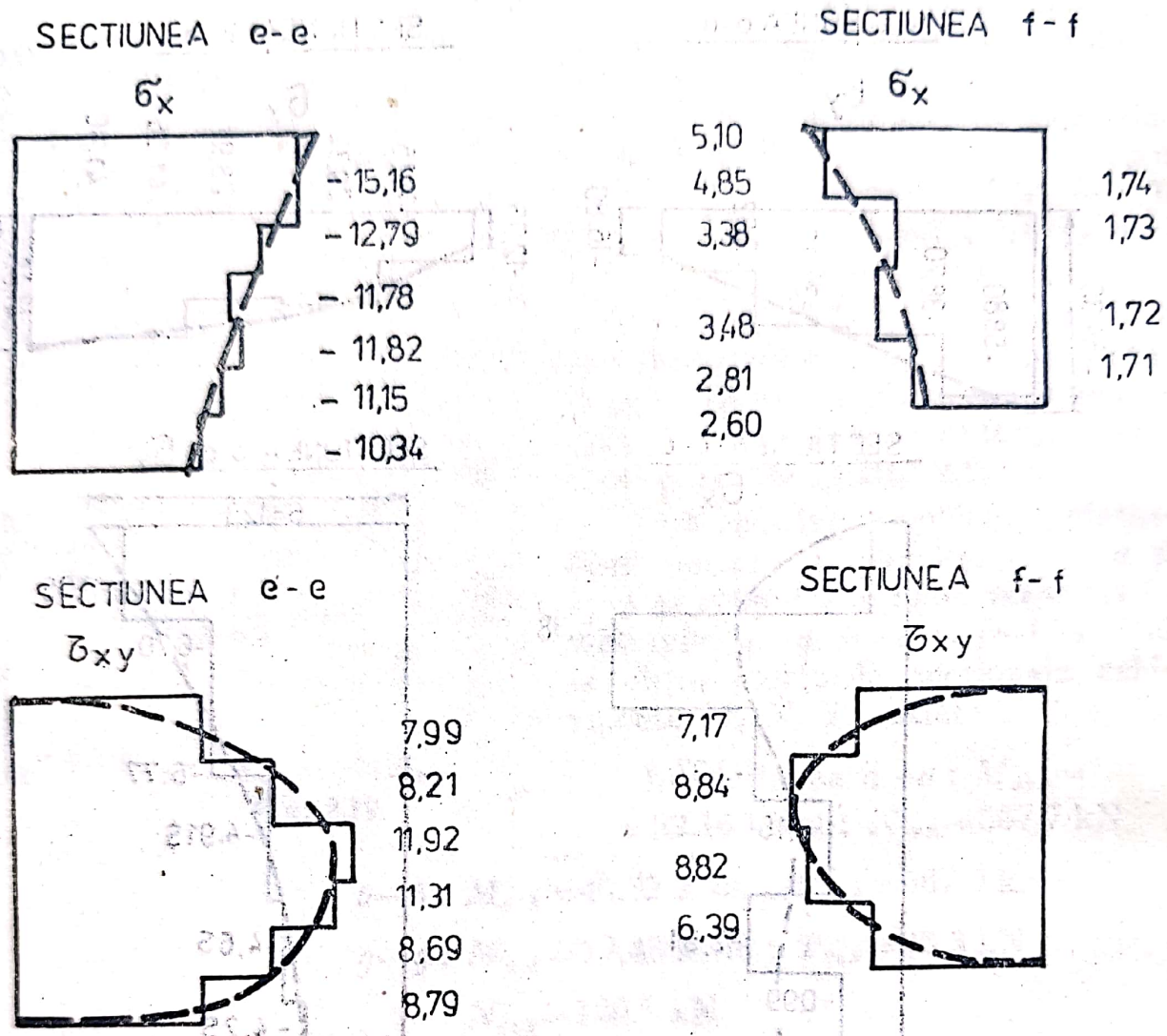


Fig. 2.14.

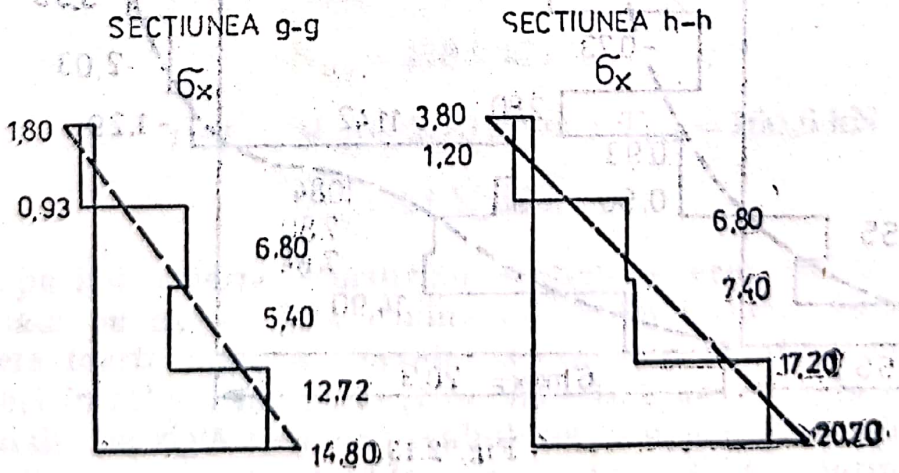


Fig. 2.15.

Scanned with OKEN Scanner

cazul conlucrării. Forța tăietoare se reduce de cca 2,5—6,2 ori. Din aceste rezultate se poate concluziona că neglijarea conlucrării cadrului cu diafragma de la etajul 1, chiar cînd aceasta prezintă un gol de ușă deasupra cadrului, nu este justificată. Rigla cadrului este foatre puțin solicitată la încovoiere proprie, fiind însă solicitată la întindere, lucrînd ca un tirant pentru diafragma cu gol.

Pe porțiunea acestui gol de ușă, forța tăietoare preluată de rigla cadrului crește mult, pînă la cca 50% din cea corespunzătoare cadrului independent. Reducerea în această porțiune a momentului încovoietior pînă la valori aproximativ nule indică o comportare asemănătoare riglelor de cuplare (buiandrugi). Reducerea efortului de încovoiere în stîlpi este mai puțin accentuată, momentele de încovoiere fiind cca 30% din valoarea corespunzătoare cadrului independent.

Din cele arătate, rezultă că și armarea riglei de cadru trebuie conformată nu ca pentru grinzi încovoiate, ci pentru bare solicitate la *întindere excentrică*, iar în porțiunea golului de uși la *întindere cu forță tăietoare*, fiind necesară în această zonă o „confinare" accentuată a betonului prin armare transversală puternică.

Pentru analiza eforturilor unitare în diafragmă, adică în panoul cu gol de la nivelul etajului 1, în figura 2.16 s-au trasat izostaticele σ_1. În această figură, cu linie groasă plină sînt trasate izostaticele cu efort unitar de întindere. Se observă în zona centrală a panoului eforturi unitare de întindere înclinate, dar de valori relativ reduse și care pot fi preluate prin armarea obișnuită cu plase a panoului. Concentrări de eforturi se observă în colțul intrînd al golului de ușă, din stînga sus. De asemenea, buiandrugul panoului este puternic solicitat la întindere în colțul drept. Spaletul central este foarte solicitat la întindere în zona inferioară, iar colțul dreapta jos al golului de ușă este supus la concentrare de eforturi unitare mari. Atît buiandrugul cît și spaletul central trebuie armați suplimentar față de armarea panourilor curente.

În figura 2.17 s-a trasat diagrama eforturilor unitare de lunecare între panoul diafragmei și rigla cadrului.

Pentru preluarea eforturilor de lunecare, importante ca valoare absolută, este necesară prevederea unor măsuri constructive corespunzătoare: sudarea de mustăți din rigla cadrului de mustățile din panou, interpunerea unei centuri subturnate între riglă și panou sau alte soluții.

Scanned with OKEN Scanner

IZOSTATICELE σ_1

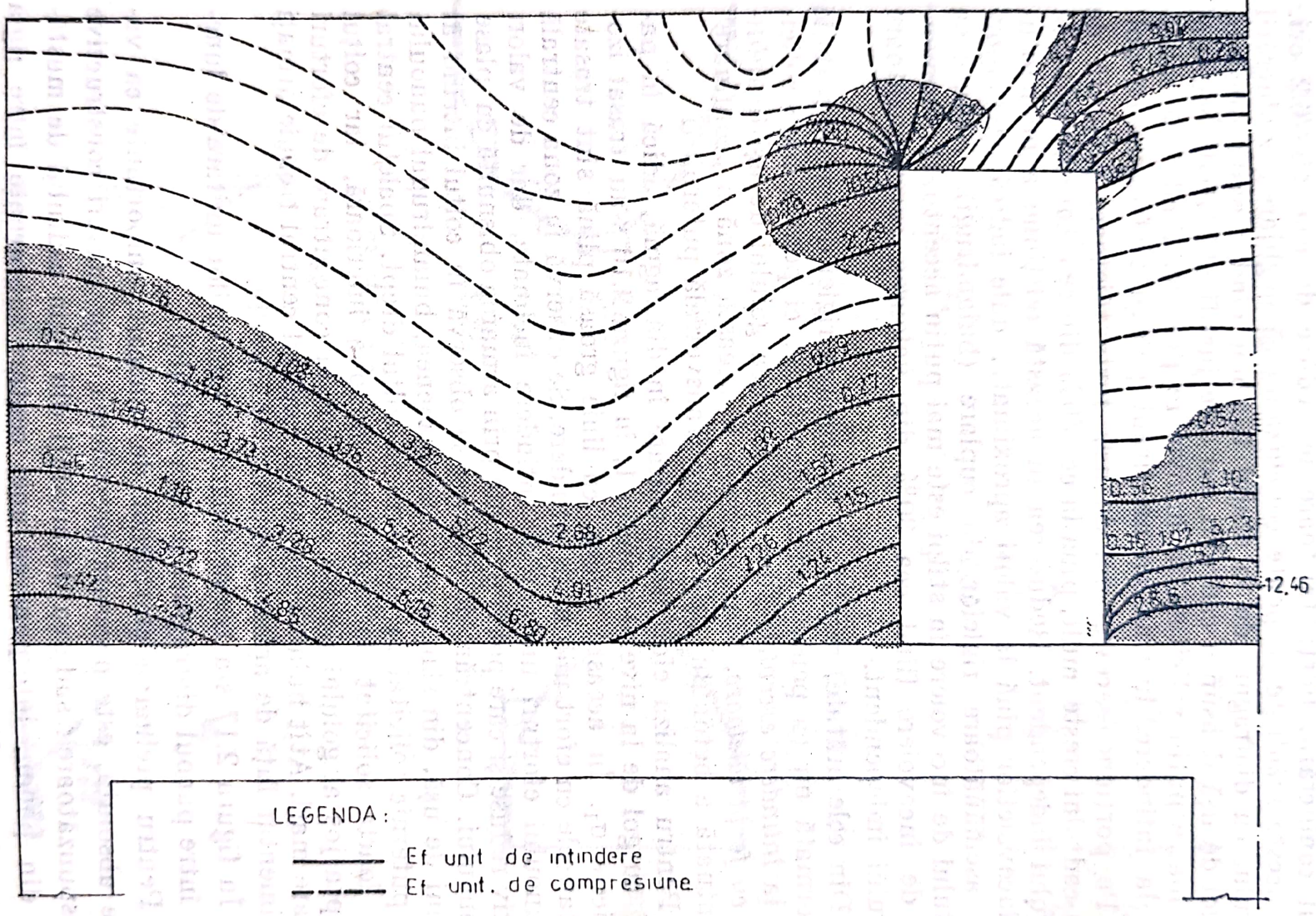


Fig. 2.16.

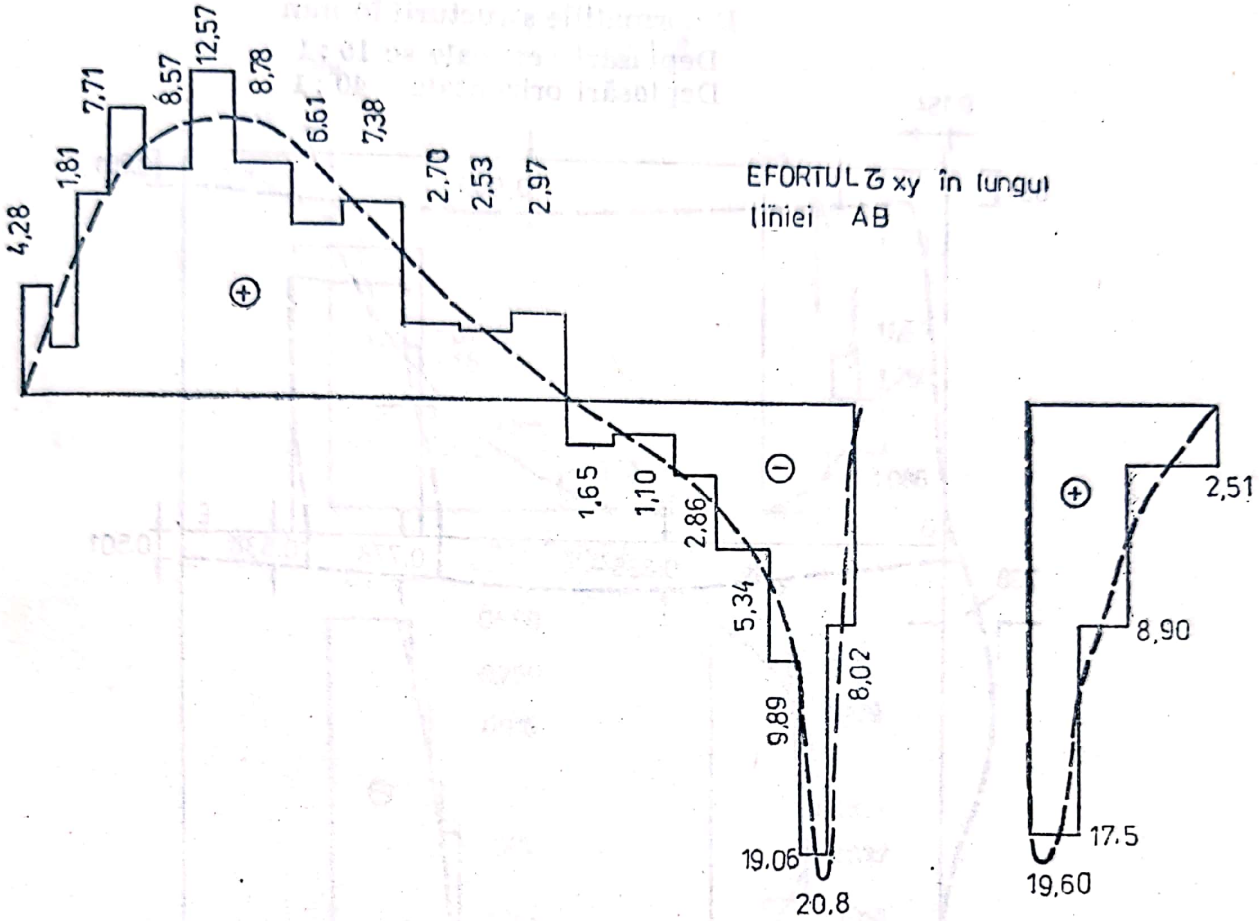


Fig. 2.17.

În ce privește modul de deformare generală a structurii la acțiunea încărcărilor verticale, în figura 2.18 este trasată deformația liniilor mediane ale stîlpilor, riglei și marginilor libere ale panoului diafragmei. Deformația de încovoiere mică a riglei și a marginii superioare a panoului, de ordinul 1/20 000, atestă comportarea rigidă a acestui sistem constructiv.

Pentru ipoteza de încărcare cu sarcini orizontale, din acțiunea seismică în figura 2.19 sînt redate diagramele de eforturi σ_x și τ_{xy} în buiandrugul panoului în secțiunea de încastrare și la mijlocul deschiderii.

Se constată că acest buiandrug este comprimat în secțiunea centrală cu cca 18,00 kN, efort axial care pentru sensul de acționare al sarcinii orizontale contrar celui din figura 2.18 devine de întindere. În secțiunea de încastrare a buiandrugului, eforturile unitare de întindere (pentru un sens de acționare a sarcinii seismice)

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

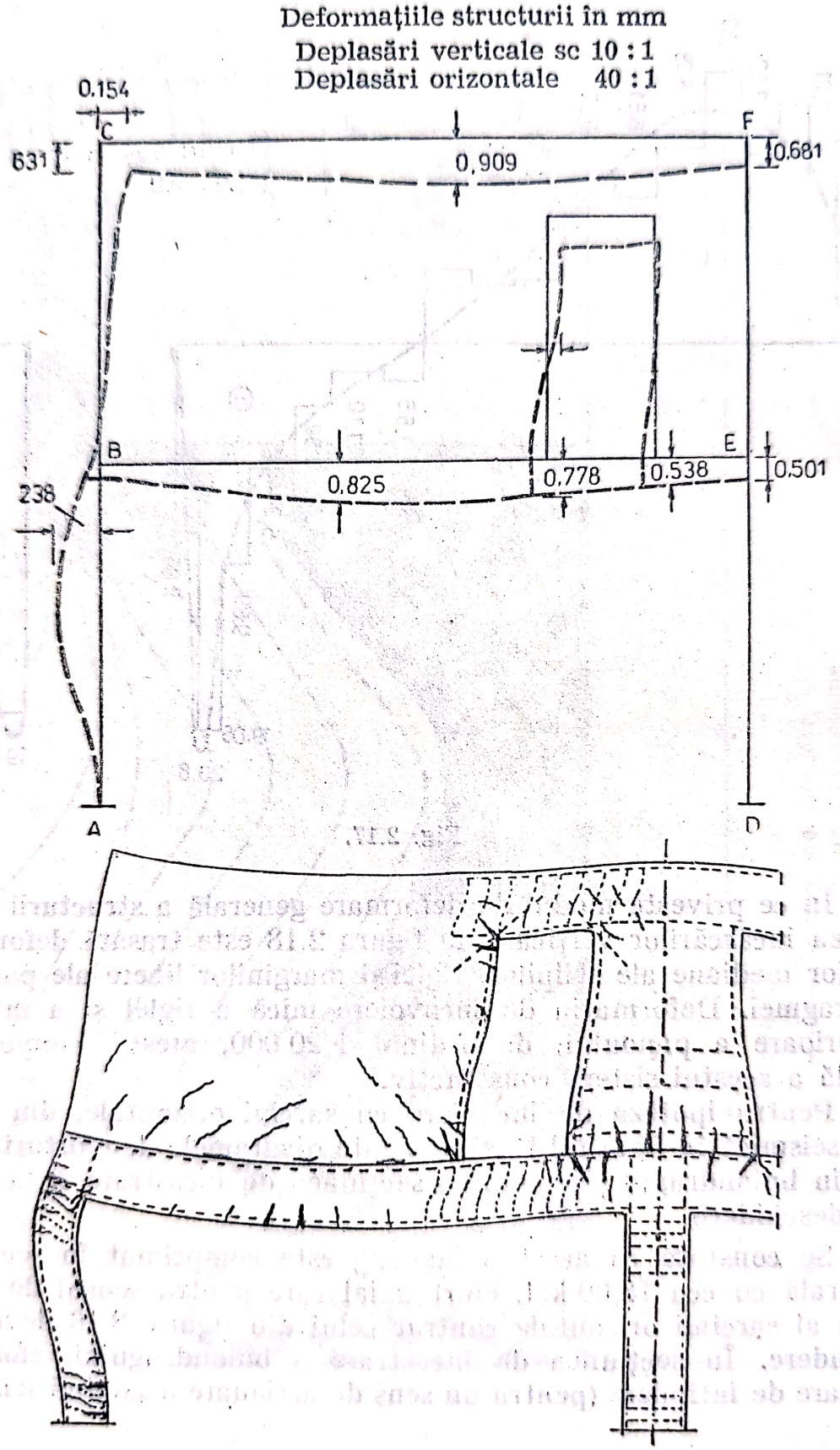


Fig. 2.18.

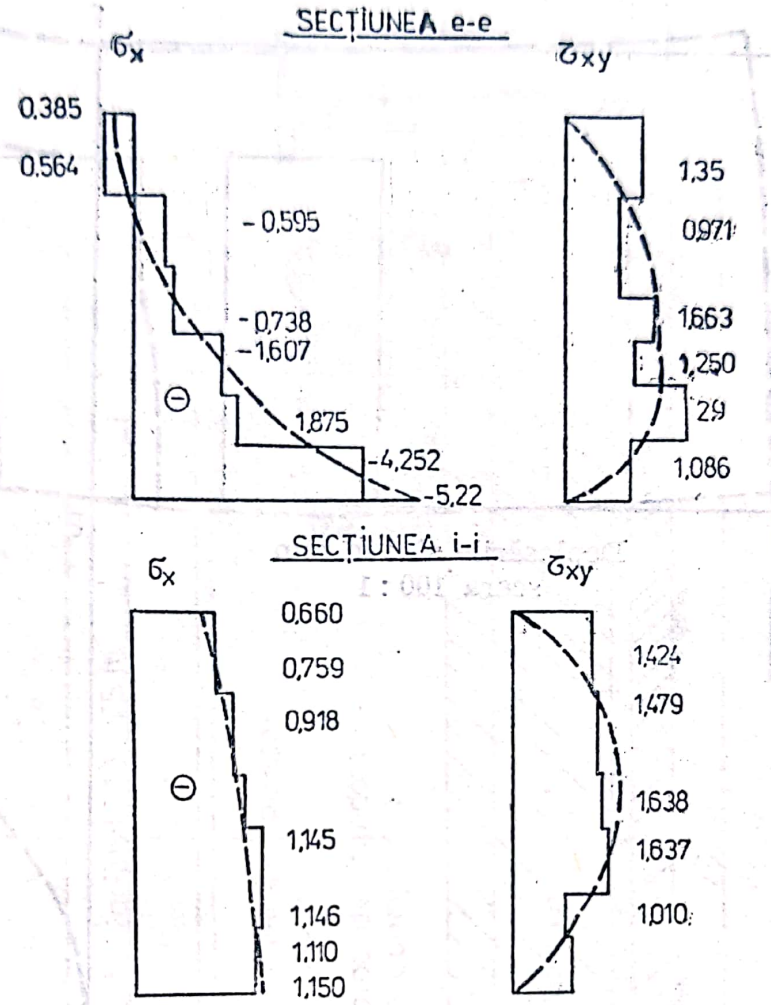


Fig. 2.19.

fiind mai mari, reclamă o armare corsepunzătoare a colțului, avînd în vedere suprapunerea eforturilor de întindere cu cele din ipoteza de încărcare la sarcini verticale.

În ce privește rigiditatea la deplasare orizontală a structurii, element important în calculul seismic, în figura 2.20 este trasată deformata structurii.

Valoarea deplasării orizontale s-a comparat cu cea determinată în ipoteza stîlpilor încastrați perfect în diafragmă, aceasta fiind indeformabilă și deplasîndu-se ca un corp rigid. În această ipoteză, rigiditatea la deplasare orizontală a structurii are valoarea :

$$K = \frac{12\,E_b}{h^3}(2I_1 + I_2) = 23519{,}30 \text{ kN/cm}.$$

Rezultă astfel o deplasare orizontală de $1{,}4823.10^{-2}$ cm care este de 2,354 ori mai mică decît cea obținută pe structura cu ele-

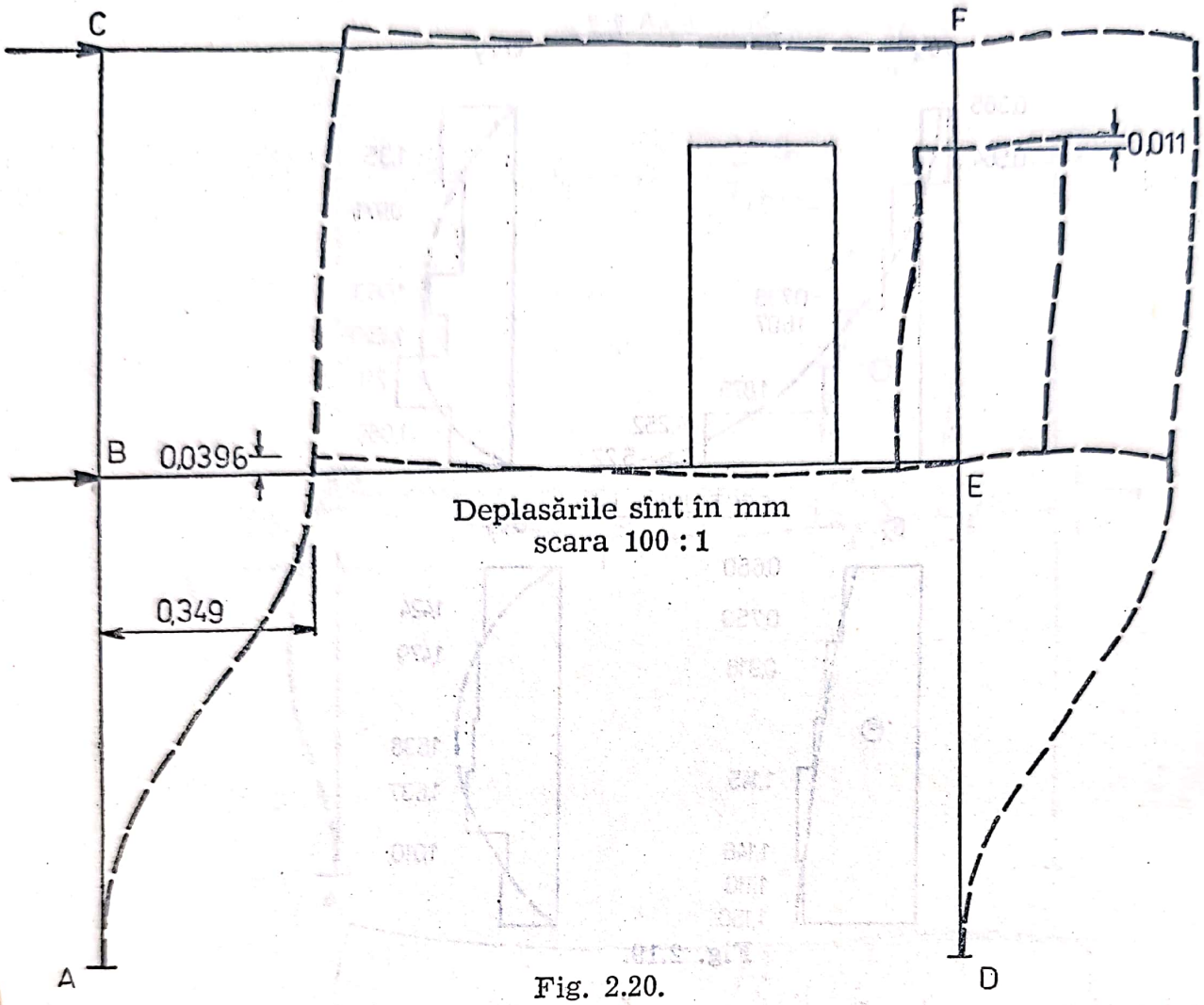


Fig. 2.20.

mente finite. Acest fapt evidențiază influența golului de ușă asupra reducerii rigidității structurii și deci asupra măririi perioadelor proprii de vibrație.

2.3. EXEMPLUL 2. FUNDAȚIA DIN BETON PRECOMPRIMAT PENTRU UN STAND DE ÎNCERCAT VAGOANE

Pentru instalația de încercat vagoane de cale ferată în regim dinamic nestaționar, simulînd acțiunea căii asupra vagonului la viteze de rulare între 0—160 km/h, s-a proiectat o fundație masivă

Scanned with OKEN Scanner

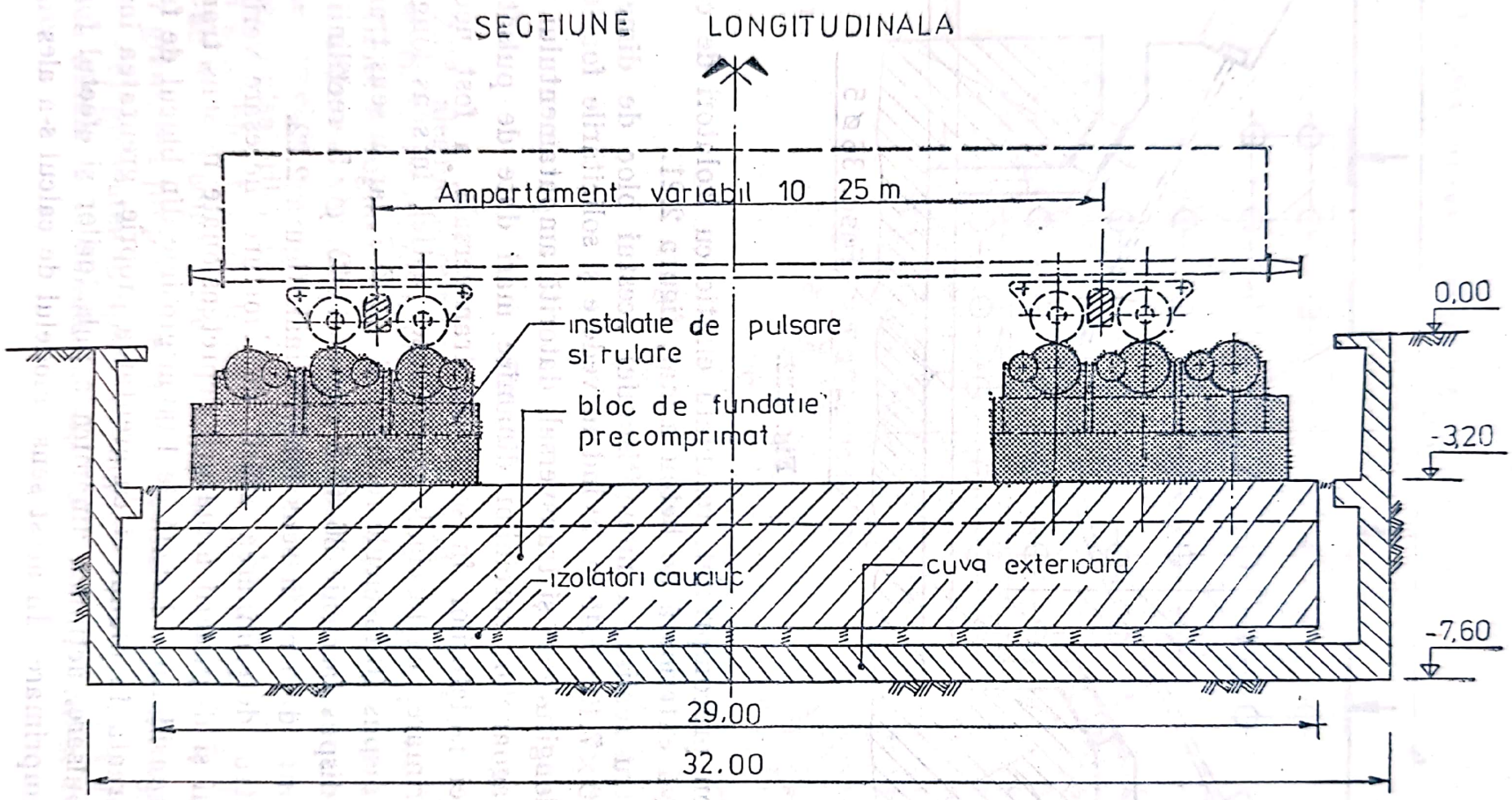

SECTIUNE LONGITUDINALA
Ampartament variabil 10 25 m
instalatie de pulsare si rulare
bloc de fundatie precomprimat
izolatori cauciuc
cuva exterioara
0,00
-3,20
-7,60
29,00
32.00

Fig. 2.21.

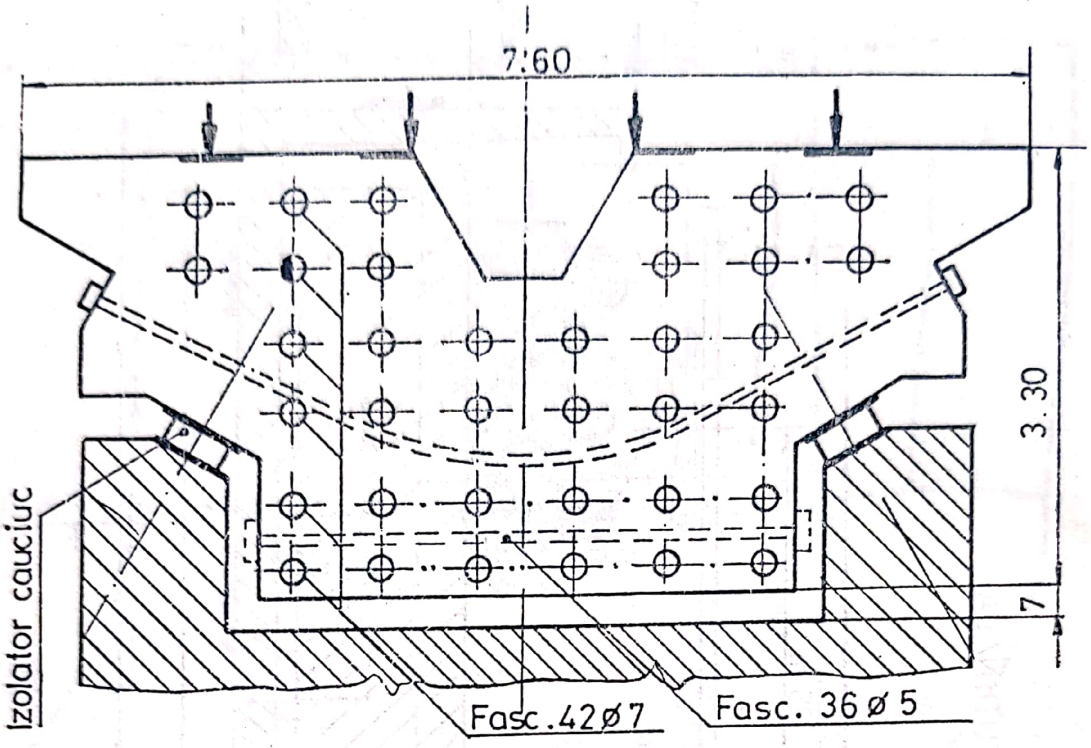


Fig. 2.22.

din beton precomprimat, rezemată elastic cu izolatori de cauciuc pe o cuvă exterioară de beton armat, figura 2.21.

Pentru realizarea monolitismului acestui bloc de dimensiuni mari 29,0 × 7,40 × 3,40 m, avînd în vedere și solicitările foarte mari în sens longitudinal și transversal, datorită ampatamentului variabil al vagoanelor, sarcinilor dinamice mari date de pulsatori și dispoziției izolatorilor în secțiunea transversală, a fost necesară precomprimarea cu fascicule postîntinse ; astfel, în sens longitudinal s-au dispus 40 fascicule rectilinii de 42 Ø 7, iar în sens transversal s-au dispus fascicule 36 Ø 5 curbe și 42 Ø 5 rectilinii la o echidistanță de 1 m în sens longitudinal, figura 2.22.

Pentru determinarea stării de eforturi, necesare verificării betonului și dispunerii armăturii nepretensionate în sens transversal, s-a considerat o lamelă de 1,00 m grosime din blocul de fundație, încărcată în planul ei cu greutatea proprie, greutatea instalației de pulsare, acțiunea dinamică a pulsatorilor și efectul forțelor de precomprimare. În acest sens, modelul de calcul s-a ales ca în

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

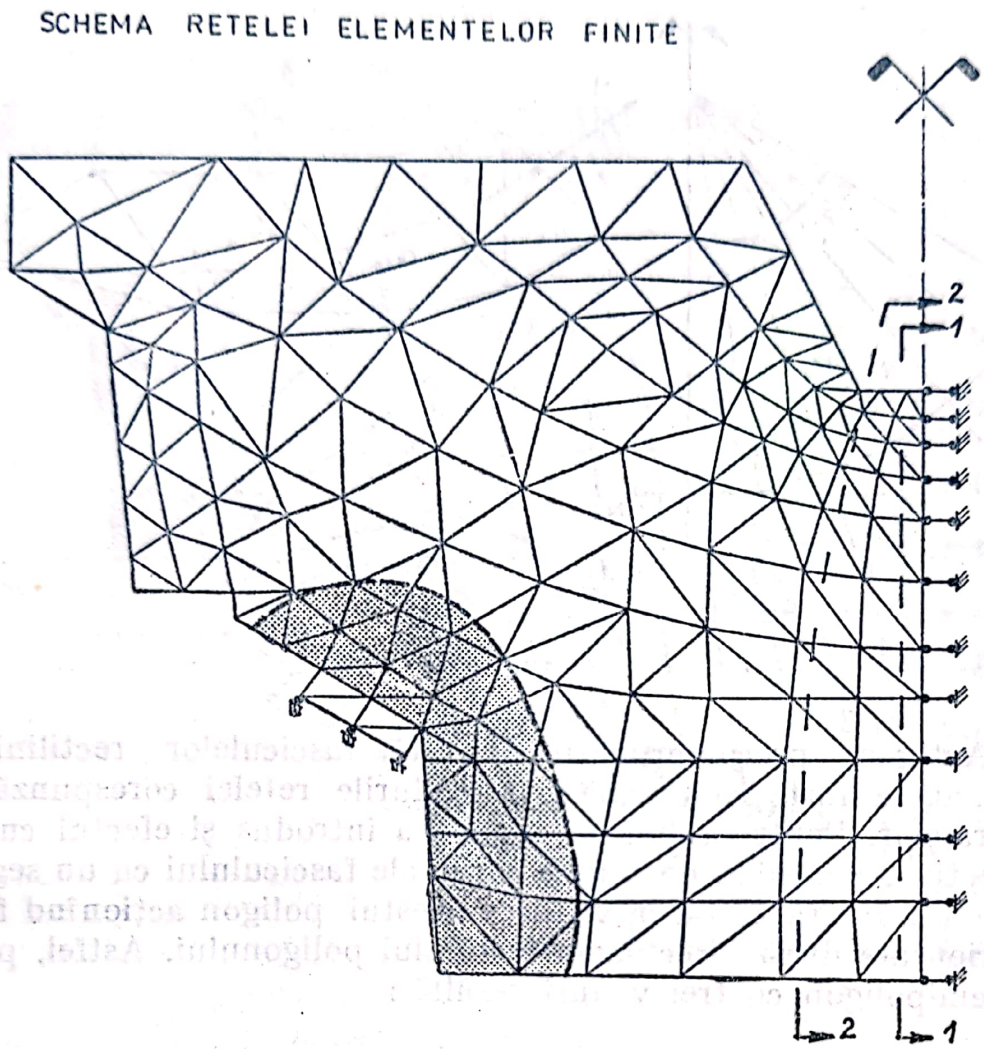


Fig. 2.23.

figura 2.22, alegînd o rețea cu 246 elemente finite triunghiulare și 151 noduri. Izolatorii de cauciuc s-au modelat de asemenea ca elemente finite triunghiulare cu modul de elasticitate de 200 daN/cm². Pentru acțiunea vertical-simetrică a pulsatorilor, nodurile de pe axa de simetrie s-au blocat la deplasarea orizontală, iar pentru acțiunea pulsatorilor vertical-antimetrică sau orizontală, aceleași noduri s-au blocat la deplasare pe verticală. Ca ipoteze de încărcare s-au luat în considerare următoarele :

a) greutatea proprie și precomprimarea în faza inițială ;

b) — e) greutatea proprie, precomprimarea în faza finală și acțiunea dinamică în simularea mișcării de săltare, ruliu, tangaj și șerpuire.

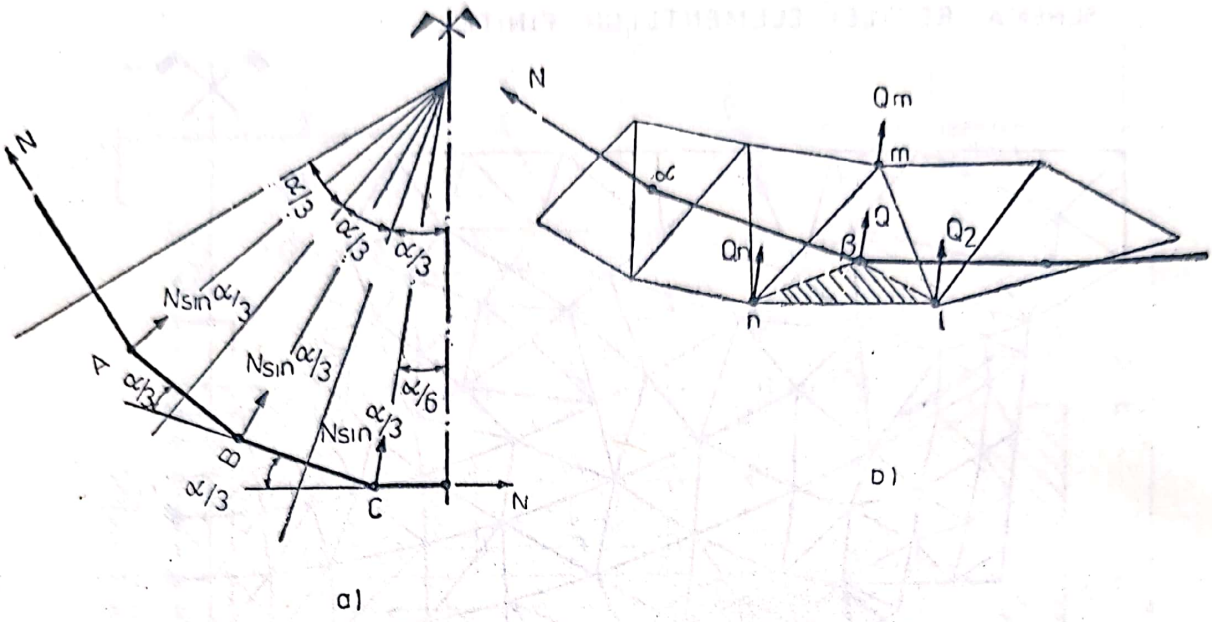


Fig. 2.24.

Acțiunea precomprimării datorită fasciculelor rectilinii s-a rezumat la forțe concentrate în nodurile rețelei corespunzătoare ancorajelor. Pentru cablurile curbe s-a introdus și efectul curburii respective. înlocuind porțiunile curbe ale fasciculului cu un segment poligonal, figura 2.24a, în vîrfurile acestui poligon acționînd forțele Q, orientate după bisectoarea unghiului poligonului. Astfel, pentru un semipoligon cu trei vîrfuri rezultă :

$$Q = 2N \sin \frac{\alpha}{6} .$$

În cazul curent, cînd vîrful poligonului nu coincide cu un nod al rețelei de elemente finite, forța Q se va înlocui cu componentele sale din vîrfurile triunghiului „*mnl*".

Coordonatele locale ale vîrfului β, fiind L_m, L_n, L_l, forța Q_m din nodul n se va determina astfel :

$$Q_m = Q \cdot L_m = Q \frac{Aria\ (\beta nl)}{Aria\ (mnl)} .$$

Pentru ipoteza de calcul 2 (greutate proprie, precomprimare în faza finală, acțiunea vertical-simetrică a pulsatorilor), în figura

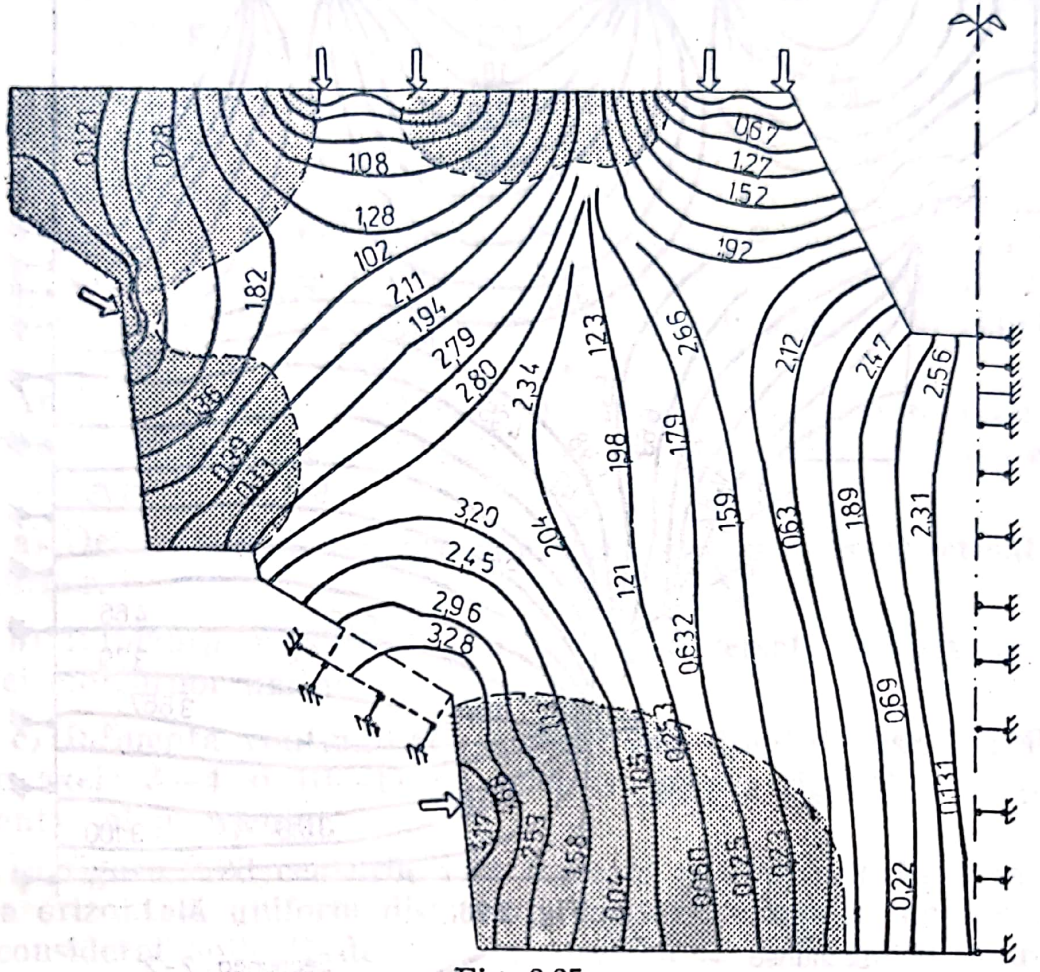


Fig. 2.25.

2.25 şi figura 2.26 sînt redate izostaticele σ_1 şi σ_2. Zonele haşurate indică regiunile cu eforturi de întindere. Se observă în partea superioară a modelului prezența a trei puncte singulare.

Eforturile unitare în secțiunile 1—1 şi 2—2 sînt ilustrate în figura 2.27. În fibra inferioară rezultă un efort de compresiune de 2,05 daN/cm^2, în ipoteza cea mai dezavantajoasă sub aspectul decompresiunii, ceea ce corespunde clasei I de fisurabilitate.

Pierderile de tensiune din fasciculele post-întinse, datorită întinderii se pot evalua prin determinarea scurtării specifice în lungul traseului cablului. Astfel, dacă acest traseu intersectează un element finit, făcînd unghiul θ cu axa x, pierderea de efort $\Delta\sigma_s$ va fi :

$$\Delta\sigma_s = E_p \cdot (\varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta).$$

Pentru fasciculul curb, această pierdere de tensiune are valori mici, $\Delta\sigma_s = 1{,}30 \ldots 3{,}20$ N/mm^2.

IZOSTATICELE S_2

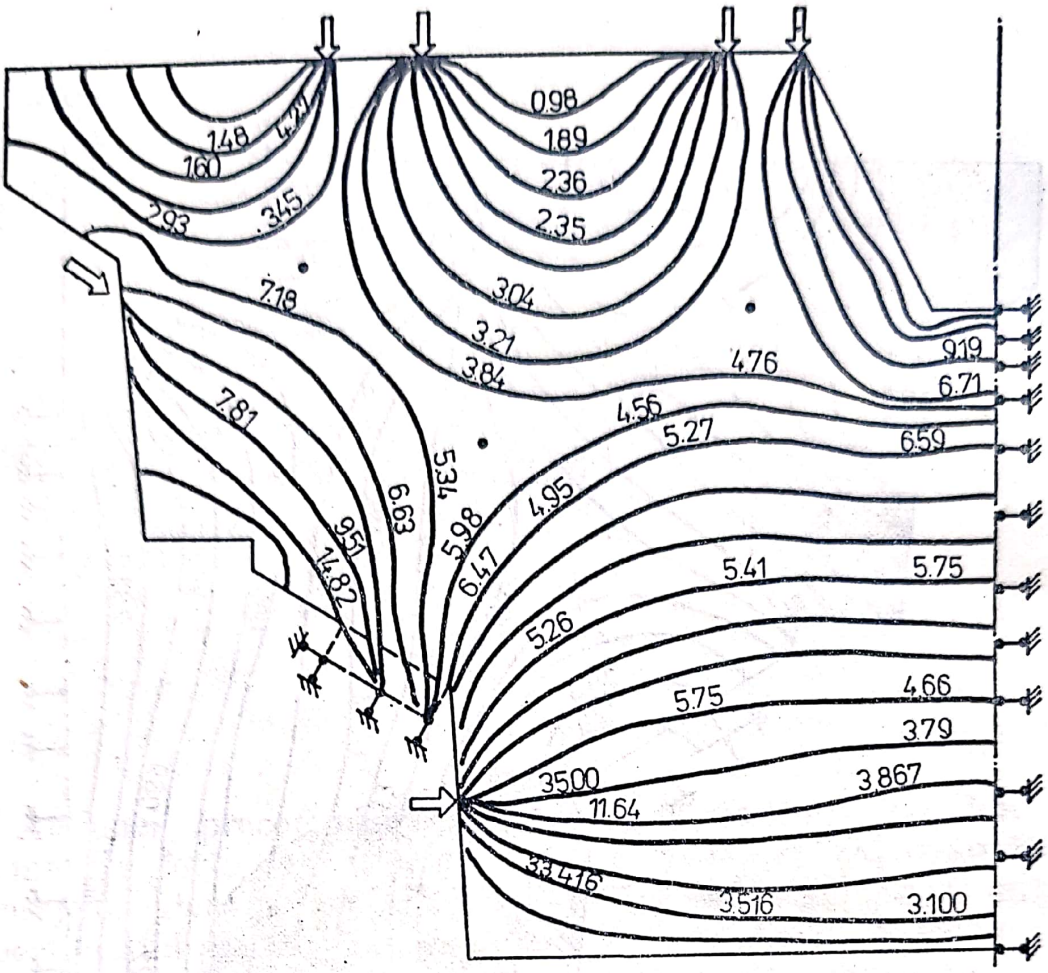


Fig. 2.26.

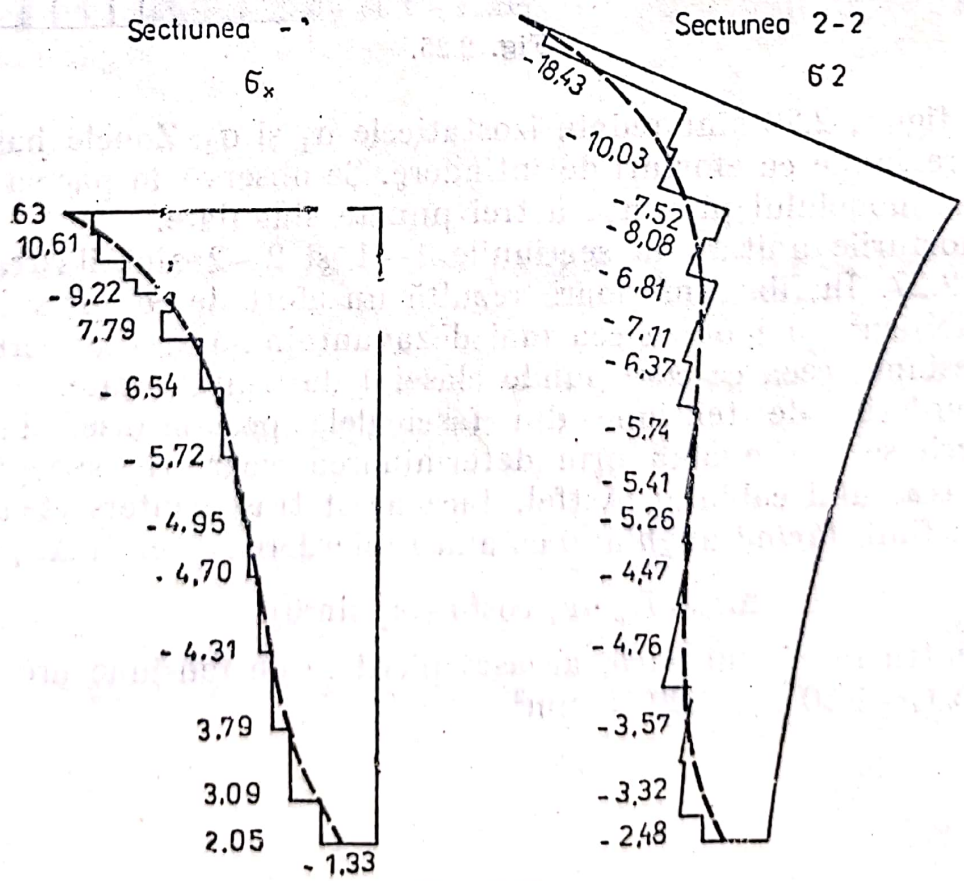


Fig. 2.27.

Scanned with OKEN Scanner

2.4. EXEMPLUL 3. PLANȘEU SOLICITAT CA ȘAIBĂ ÎN PLANUL SĂU

Planșeul superior al unei clădiri înalte P+10 etaje, figura 2.28, este solicitat în planul său la încărcări orizontale din acțiunea seismică. Structura clădirii în sens transversal este mixtă, formată din cadre cu 3 deschideri identice și două diafragme la capetele clădirii.

Analiza stării de eforturi și deformații a acestui planșeu cu metoda elementelor finite are ca obiectiv elucidarea următoarelor obiective :

a) Determinarea eforturilor unitare în beton și în armătura centurilor.

b) Influența rigidității cadrelor transversale asupra distribuției eforturilor unitare în planșeu.

c) Influența continuității centurii din dreptul casei scărilor, între axele 3—4 și 10—11 pe șirul *D*, asupra rigidității în plan orizontal al planșeului.

În figura 2.28 centurile sînt indicate cu linii punctate. Încărcarea orizontală uniform distribuită (acțiunea forțelor de inerție) s-a considerat aplicată de-a lungul șirurilor *A* și *D*, iar reacțiunile cadrelor și diafragmelor de capăt s-au considerat distribuite uniform în lungul axelor transversale respective.

Modelul de calcul s-a ales cu elemente finite triunghiulare pentru planșeul de beton armat de 12 cm grosime, și cu elemente finite de tip bară dublu articulată pentru centura armată. În figura 2.29 este arătat modelul cu rețeaua de elemente finite. Structura de calcul cuprinde 260 elemente triunghiulare, 77 elemente bară, 164 noduri. Pentru calcul s-a utilizat programul MEFBAR, program de calcul orientat pentru probleme plane. Discretizarea mediului continuu se evidențiază în acest caz și prin faptul că utilizarea elementelor finite tip bară articulată, pentru modelarea armăturilor, reduce fenomenul aderenței armăturii ca fenomen continuu la o *legătură discretă* numai în noduri, între elementele tip bară și cele triunghiulare, între noduri bara fiind detașată de elementul triunghiular. Acest fapt nu împietează asupra aspectului calitativ al comportării de ansamblu a planșeului, ci în mod

Scanned with OKEN Scanner

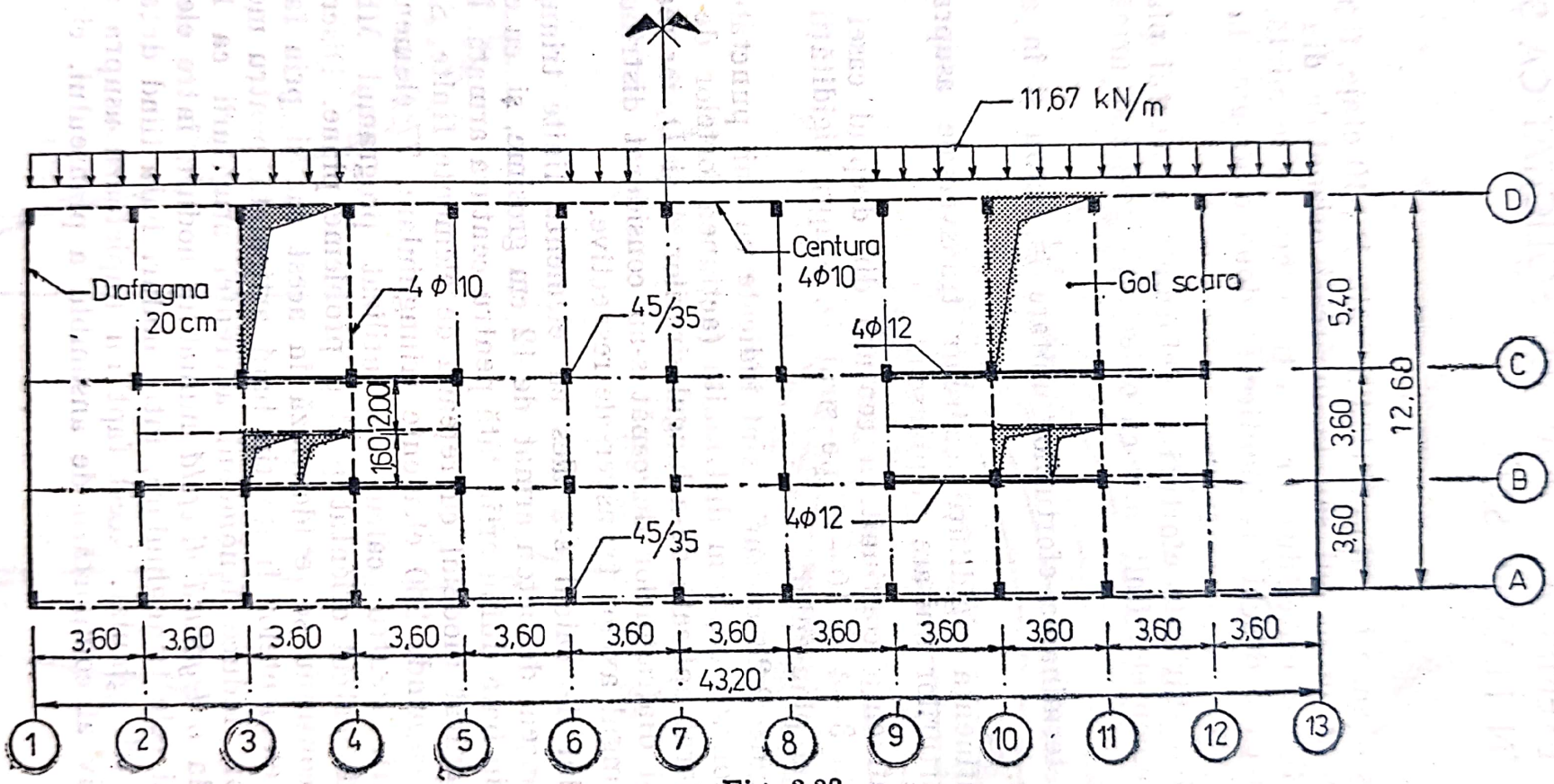


Fig. 2.28.

Scanned with OKEN Scanner

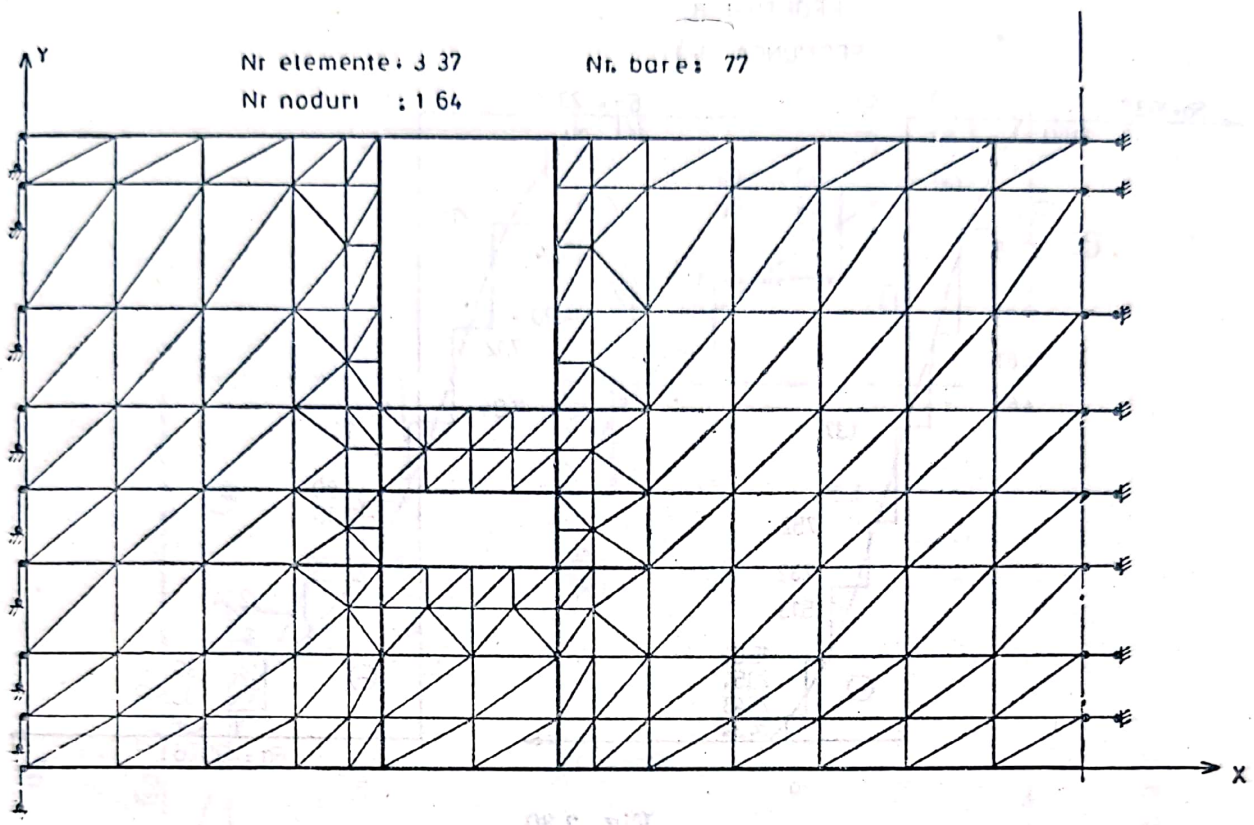


Fig. 2.29.

deosebit asupra aspectelor legate de comportarea locală (fisurare, concentrare de eforturi).

Influența rigidității cadrelor transversale asupra mărimii eforturilor unitare din planșeu este evidențiată de diagrama eforturilor σ_x din secțiunea 1—1, figura 2.30. Pentru cazul luării în considerare a rigidității cadrelor transversale distribuția efortului σ_x este indicată în figura 2.30 a, iar pentru cazul cînd se neglijează rigiditatea cadrelor transversale distribuția lui σ_x este arătată în figura 2.30 b.

Se observă că în situația neglijării aportului cadrelor transversale la preluarea încărcării orizontale, eforturile unitare σ_x din șaiba planșeului cresc cu cca 50 %. Ipoteza diminuării rigidității cadrelor transversale relativ la rigiditatea orizontală a structurii întregi (cadre și diafragmele de capăt) trebuie luată în considerare la verificarea în stadiul ultim, de cedare, sub acțiunea seismică, unde datorită ductilității mai mari a cadrelor față de cea a diafragmelor pline de capăt, acestea din urmă se încarcă mai mult decît în cazul comportării ideal elastice.

Scanned with OKEN Scanner

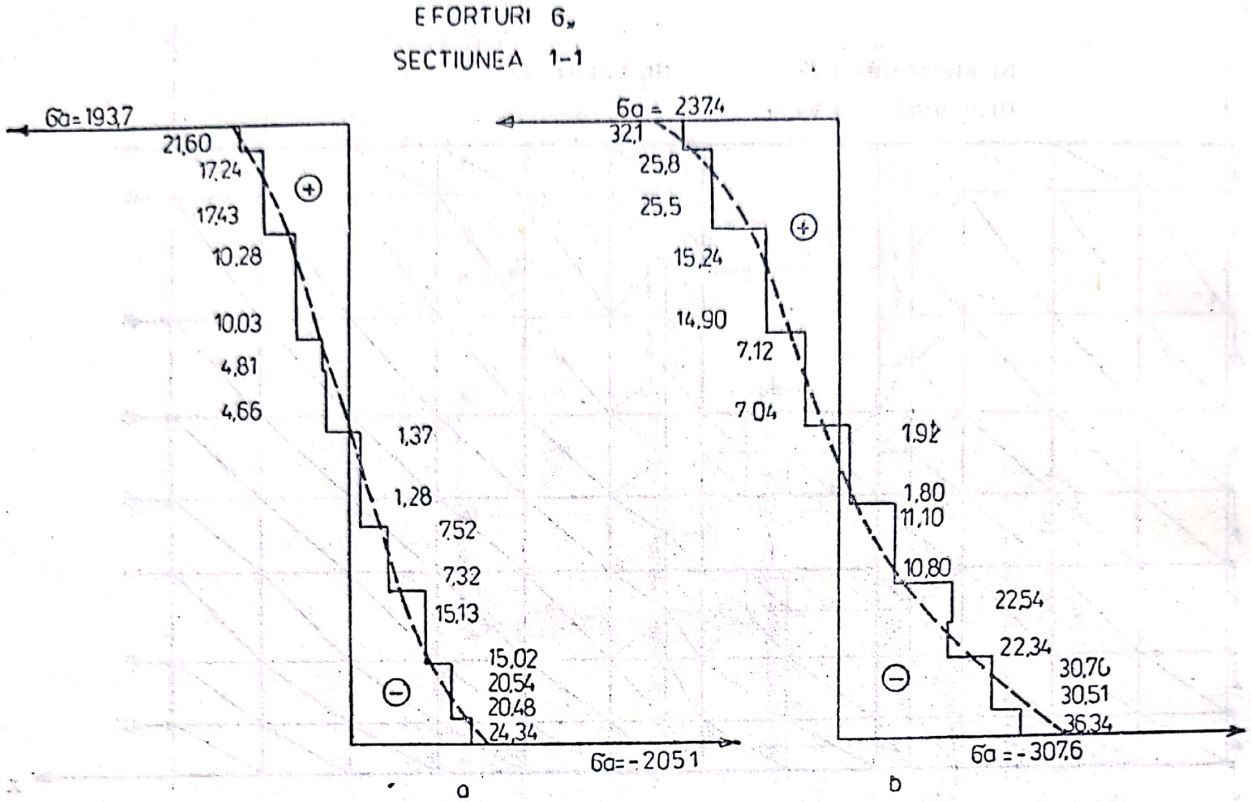


Fig. 2.30.

În ce privește influența centurii exterioare, șirul D, din dreptul casei scării, în figura 2.31 sînt arătate diagramele de eforturi σ_z în secțiunea 2—2. Pentru cazul cînd centura exterioară între axele 3 și 4 lipsește, figura 2.31 b, eforturile unitare din porțiunea inferioară cresc cu 21%, iar cele din porțiunea superioară (între casa scării și puțul de ascensor) cu 30%.

Prezența centurii respective mărește cu cca 19% rigiditatea orizontală a planșeului conform figurii 2.32, unde s-a trasat deformata orizontală după direcția $y—y$ a planșeului.

Alura deformației planșeului relevă următoarele aspecte:

a) Porțiunea centrală a planșeului între axele 3 și 7 (și simetric) se deformează foarte puțin în comparație cu zonele marginale ale planșeului.

b) Zona dintre golul casei scării și golul ascensorului și cea din acesta și șirul A se deformează puternic prin lunecare, avînd aspectul deformării riglelor de cuplare (buiandrugi) ai diafragmelor cu goluri.

Scanned with OKEN Scanner

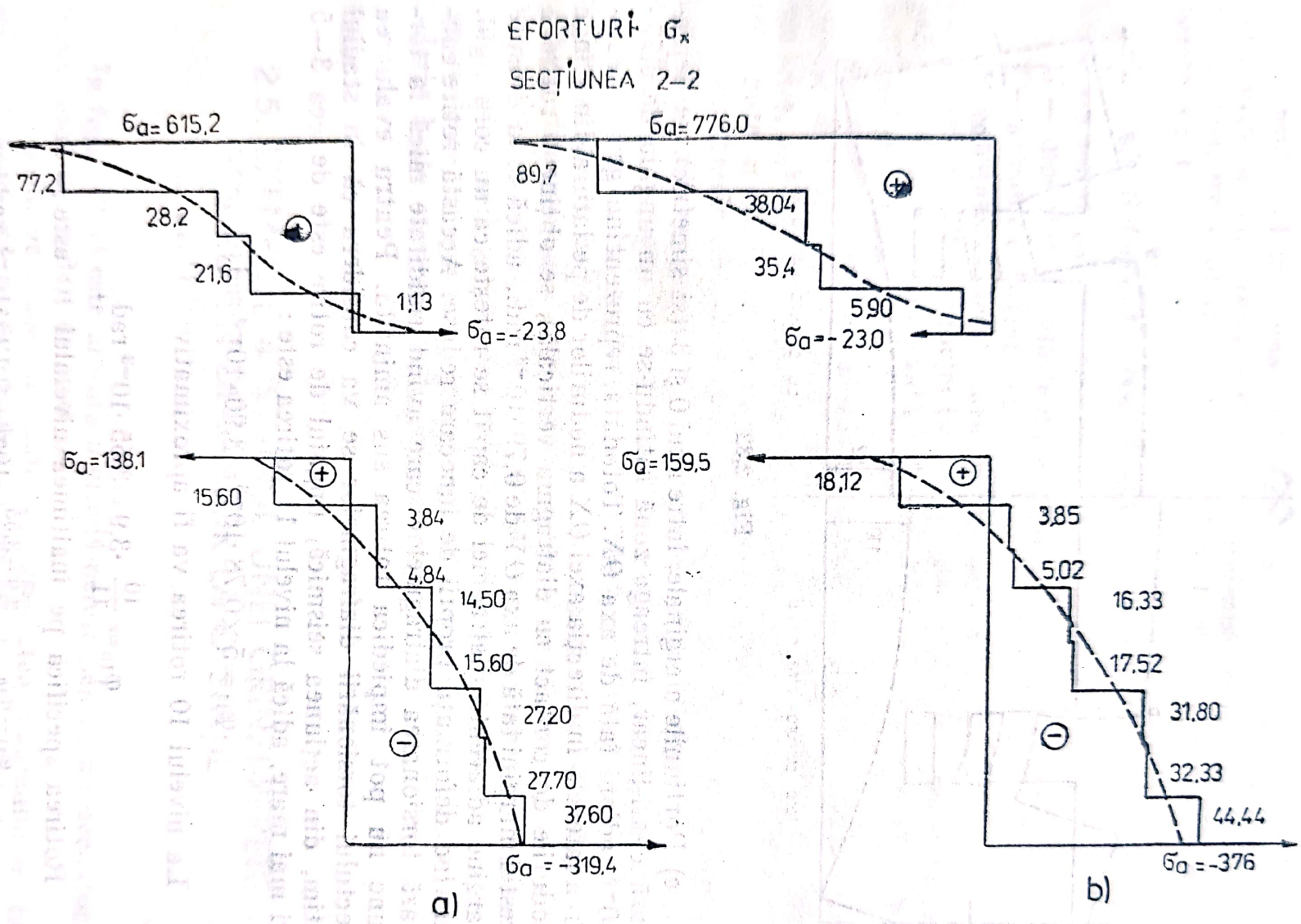

EFORTURI σ_x
SECȚIUNEA 2–2
σ_a= 615,2
77,2
28,2
21,6
1,13
σ_a = -23,8
σ_a= 776,0
89,7
38,04
35,4
5,90
σ_a = -23,0
σ_a=138,1
15,60
3,84
4,84
14,50
15,60
27,20
27,70
37,60
σ_a = -319,4
a)
σ_a= 159,5
18,12
3,85
5,02
16,33
17,52
31,80
32,33
44,44
σ_a = -376
b)

Fig. 2.31.

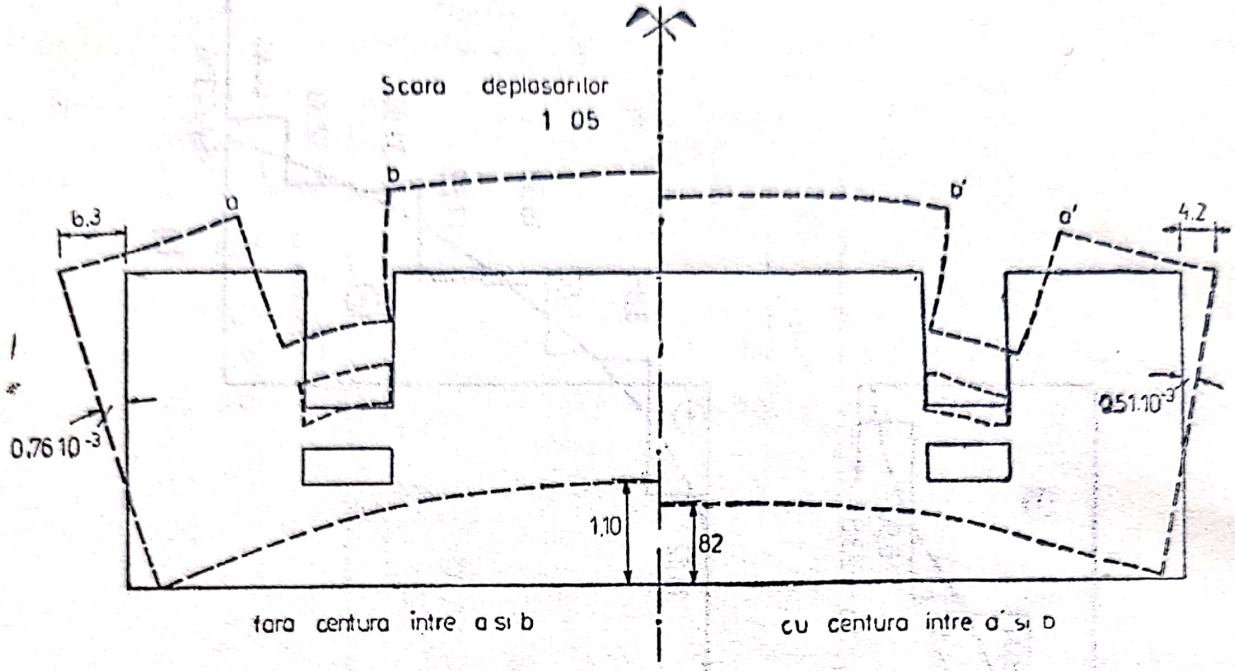


Fig. 2,32.

c) Porţiunile marginale, între axul 0 și 3 (și simetric), se deplasează cvasi-linear, întreaga zonă rotindu-se cu un unghiu de $0{,}77 \cdot 10^{-3}$ radiani față de axa OX. Totodată, reprezentînd grafic deplasarea laterală în direcția axei OX a nodurilor de pe latura din stînga (nodurile de contact cu diafragma verticală), se obține o rotire a acestei margini față de axa OY de $0{,}79 \cdot 10^{-3}$ rad., adică zona dinspre margine adiacentă diafragmei de capăt se rotește ca un corp rigid, suferind deformații proprii de lunecare reduse. Această rotire cauzează torsionarea diafragmelor care avînd rigiditate mică la torsiune nu pot împiedica rotirea sus amintită. Pentru evaluarea efectului torsionării diafragmelor se va considera că în stadiul ultim, din acțiunea seismică, unghiul de rotire este de cca 3—5 ori mai mare, adică la nivelul 11 rotirea este :

$$\varphi_{11} = 5 \times 0{,}78 \cdot 10^{-3} = 3{,}90 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

La nivelul 10 rotirea va fi aproximativ

$$\varphi_{10} = \frac{10}{11} \cdot 3{,}9 = 3{,}55 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Rotirea specifică pe înălțimea nivelului 10 este :

$$\varphi' = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{10}}{h} = \frac{3{,}9 - 3{,}55}{2{,}8} \cdot 10^{-5} = 0{,}125 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd în prima aproximare că efectul torsiunii se manifestă prin răsucire liberă a diafragmei, neglijînd rigiditatea la încovoiere-răsucire conferită de bulbi, efortul unitar tangențial de răsucire va fi

$$\tau_t = G \cdot t \cdot \varphi' \simeq 110\,000 \cdot 22 \cdot 0{,}125 \cdot 10^{-5} \simeq 3{,}00 \text{ daN/cm}^2,$$

unde s-a notat cu:

G — modulul de elasticitate transversal pentru beton B 200,

t — grosimea diafragmei.

Se constată că acest efort unitar, care se suprapune cu efortul tangențial din efectul forței tăietoare, este destul de mic, neputînd periclita capacitatea portantă a diafragmei, dar va influența asupra modului de fisurare.

Pe măsură însă ce numărul nivelurilor crește, valoarea unghiului de răsucire specifică crește de asemenea, astfel că valorile lui τ_t pot deveni periculoase, aceste diafragme de capăt trebuind concepute și cu rigiditate la încovoiere-răsucire mare.

Rezultatele obținute din acest studiu cu ajutorul elementelor finite, arătate succint mai sus, permit să concludem că centura de „închidere" a golului casei scării nu este esențială în comportarea planșeului ca șaibă în planul său. Puternic solicitate sînt centurile de la marginile golului casei scării și a golului de ascensor, care trebuie dimensionate pentru întreg volumul de eforturi de întindere din șaibă, în secțiunea 2—2. De asemenea, zonele din planșeu dintre cele două goluri sînt cele mai solicitate la lunecare, motiv pentru care la realizarea planșeului din semipanouri prefabricate trebuie luate măsurile corespunzătoare.

2.5. EXEMPLUL 4. STUDIUL UNEI GRINZI-PERETE PENTRU UN DECANTOR LA O STAȚIE DE FILTRE

În figura 2.33 este arătată o grindă-perete pentru un decantor, avînd două deschideri de 6,00 m.

Încărcările verticale sînt date de: greutatea planșeului de la cota +9,60 m, greutatea plăcilor cu crepine la cota +6,60, greutatea planșeului (inclusiv coloana de apă) de la cota 5,60 m și în-

Scanned with OKEN Scanner

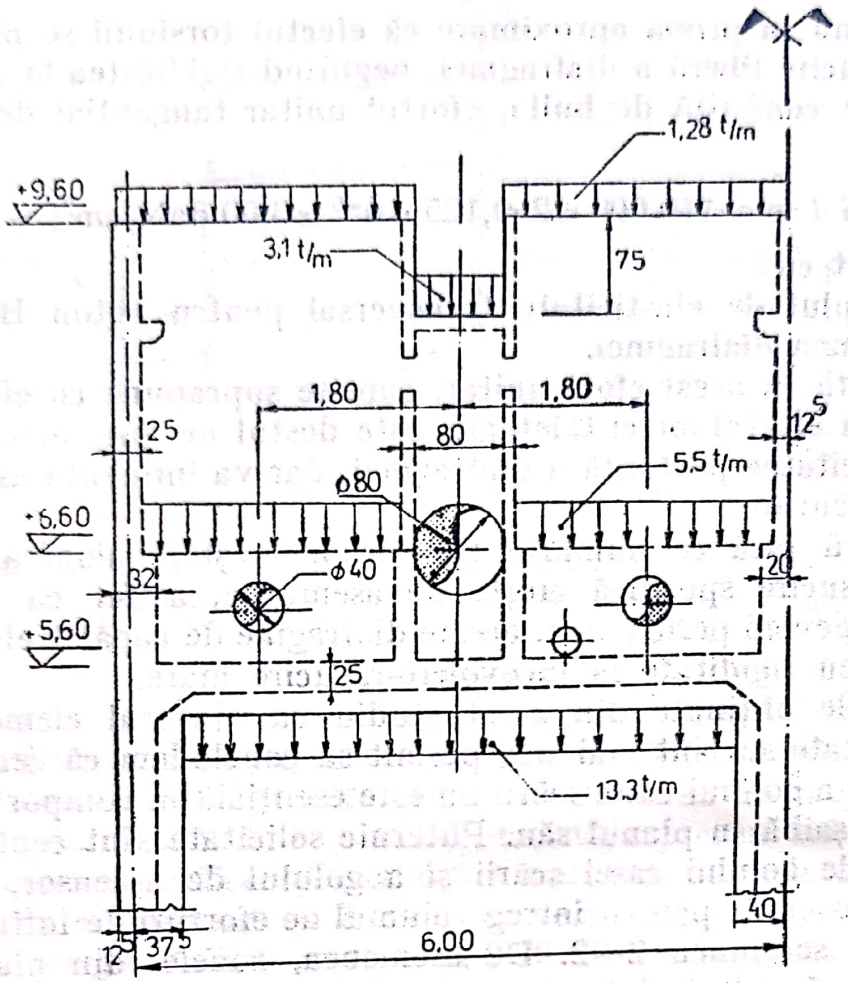


Fig. 2.33.

cărcarea adusă de jgheabul central. La mijlocul deschiderii este practicat un gol circular cu Ø 80 cm ; de asemenea, simetric față de axul central al deschiderii mai sînt dispuse două goluri circulare Ø 40 cm. Grosimea peretelui este de 22 cm între cota 6,60 și 9,60m și 30 cm între 5,60 și 6,60 m.

Armarea principală a peretelui este indicată în figura 2.34. Beneficiind de avantajul simetriei, modelul de calcul cu elemente finite s-a rezumat numai la o deschidere.

Pentru a se putea evalua eforturile din barele armăturii s-a utilizat programul MEFBAR, modelul de calcul cuprinzînd 257 elemente triunghiulare și 65 elemente tip bară (pentru modelarea armăturii), figura 2.35.

Programul s-a rulat de două ori, pentru două faze de comportare și anume : prima rulare s-a efectuat considerînd o comportare perfect elastică. Rezultatele acestui calcul sînt ilustrate în figura 2.36 pentru diagrama de eforturi unitare σ_x din secțiunea 1—1.

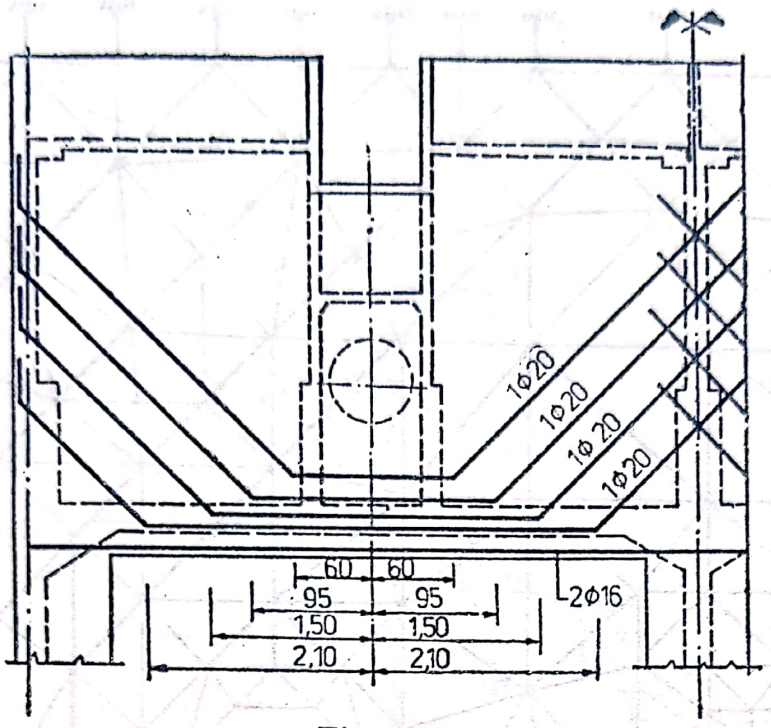


Fig. 2.34.

Din figura 2.36 se constată concentrarea de eforturi în jurul golului Ø 80 cm și în jurul golului pentru jgheabul superior. Totuși, valorile absolute ale eforturilor unitare nu sînt prea mari, datorită grosimii mari a grinzii-perete. Deoarece grinda perete trebuie să fie un element etanș, problema fisurării este deosebit de importantă. Modul de definire al elementelor finite incorporate în programul MEFBAR, triunghiulare pentru beton și de tip bară pentru armături, nu poate oferi rezultate cantitative referitoare la deschiderea fisurilor. Totuși, se pot obține informații utile cu caracter calitativ. Astfel, pentru exemplul de mai sus s-a considerat că rezistența limită la întindere a betonului este de $R_t = 0{,}8$ N/mm^2; în acest fel, elementele finite pentru care efortul unitar principal $\sigma_1 \geqslant R_t$, s-au considerat „degenerate" (vezi capitolul 4).

În rularea a doua, cu programul MEFBAR, pentru aceste elemente finite s-a adoptat o valoare redusă a modulului de elasticitate și anume $E_b' = 1/10\, E_b$, în figura 2.37 fiind arătate valorile eforturilor unitare σ_x în secțiunea 1—1 în beton, precum și în barele armăturilor. O primă constatare este aceea că bara cea mai de sus (1) s-a încărcat foarte puțin cu efort după fisurare, încît ea ar putea fi eliminată. În ceea ce privește creșterile eforturilor maxime în bare în urma fisurării, acestea sînt mai mari decît cele

Fig. 2.35.

Scanned with OKEN Scanner

Secțiunea 1-1 (înainte de fisurare)

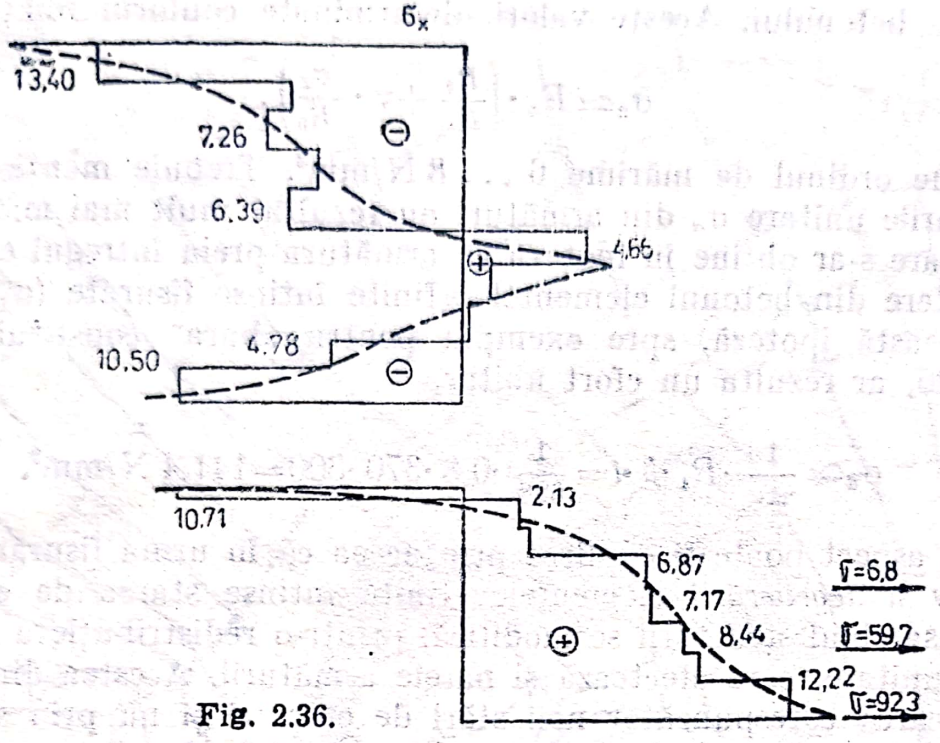
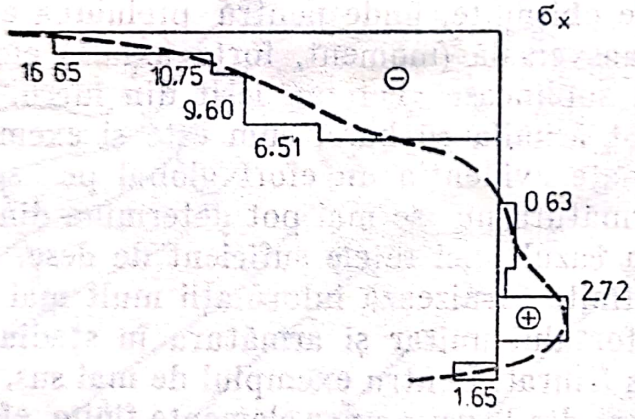


Fig. 2.36.

Secțiunea 1-1 (după fisurare)



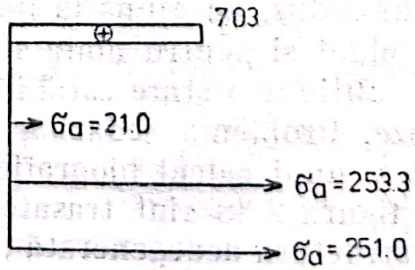


Fig. 2.37.

corespunzătoare deformației elastice la limita de rupere prin întindere a betonului. Aceste valori, determinate conform relației

$$\sigma_a \simeq E_a \cdot \left(\frac{R_t}{E_b} + \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E_b} \right),$$

sînt de ordinul de mărime 6 ... 8 N/mm². Trebuie menționat că eforturile unitare σ_a din armături au rezultat mult mai mici decît cele care s-ar obține în ipoteza că armătura preia întregul efort de întindere din betonul elementelor finite întinse fisurate ($\sigma_1 \geqslant R_t$); în această ipoteză, spre exemplu pentru „bara" constituită din 2 ⌀ 20, ar rezulta un efort unitar,

$$\sigma_a \simeq \frac{1}{Aa} \cdot R_t \cdot b \cdot t = \frac{1}{628} \cdot 0{,}8 \cdot 370 \cdot 300 = 141{,}4 \text{ N/mm}^2.$$

Acest aspect poate fi explicat prin aceea că în urma fisurării, respectiv a *degenerării* elementelor finite întinse starea de eforturi pe ansamblul structurii se modifică, printr-o redistribuție a eforturilor unitare, care afectează și barele armăturii. Acestea din urmă se încarcă corespunzător noii stări de eforturi și nu prin simplul transfer de eforturi de la beton la armătură. Acest transfer are loc, într-o formă mai mult sau mai puțin accentuată, la elemente liniare, cum sînt grinzile obișnuite, unde pentru preluarea efortului global în secțiunea transversală (moment, forța axială) efortul în armătură va trebui să suplinească betonul ieșit din lucru. Pentru structurile ce nu se pot asimila cu bare, cum este și exemplul de față, și unde nu se poate evidenția un efort global pe secțiune, eforturile unitare în armătură nu se mai pot determina din simple ecuații de echilibru. În cazul unei rețele suficient de dese, metoda de calcul cu elemente finite furnizează informații mult mai corecte referitor la valoarea efortului unitar și armătura în stadiul II de lucru, cu betonul întins fisurat. Pentru exemplul de mai sus, rezultă că după fisurare și ieșirea din lucru a unor elemente finite, eforturile în armături deși au crescut, au rămas la valori relativ mici. Este de remarcat faptul că după a doua rulare alte elemente finite, dar în număr redus, au ajuns la limita de cedare prin întindere. Calculul s-a reluat și pentru noua structură cu noi elemente degenerate, cînd s-a obținut o stare „stabilă", adică fără ca alte elemente finite să cedeze. Problema cedărilor succesive a elementelor finite, deci simularea unui calcul biografic, este tratată în capitolul 4.

În figura 2.38 sînt trasate izostaticele din prima rulare, deci pentru structura nedegenerată ; zonele fisurate sînt indicate hașurat.

Scanned with OKEN Scanner

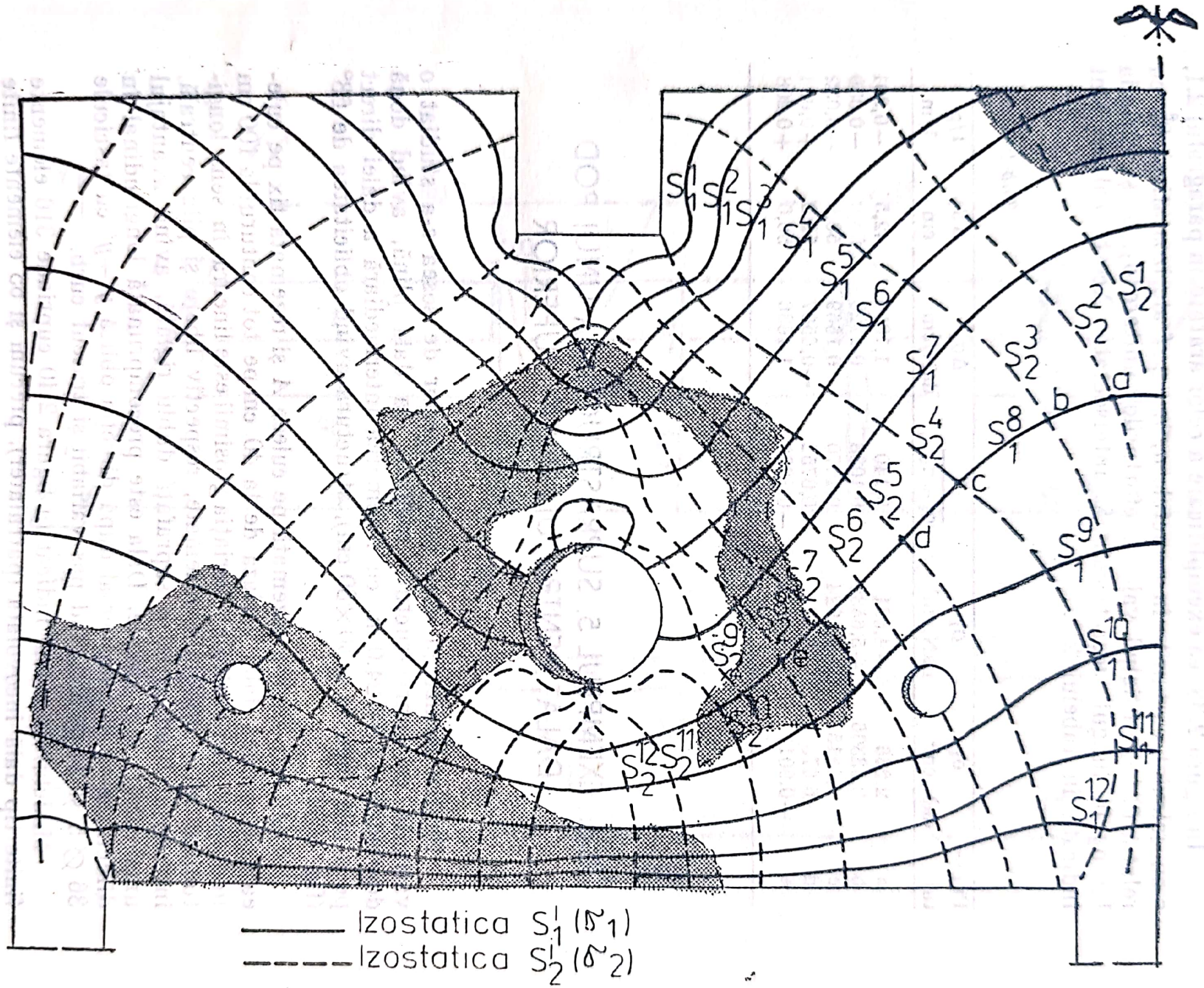


Fig. 2.38.

În figura 2.38, ca exemplificare a celor arătate în paragraful 2.1, s-au calculat curburile în punctele $a, b, \ldots, f$ ale izostaticei S_1^8, cu relația (2.18) utilizînd valorile eforturilor unitare σ_1, σ_2 și variația lui σ_2 în lungul izostaticelor S_2 intersectate. Aceste calcule sînt indicate în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1

Punctul	σ_1 daN/cm²	σ_1 daN/cm³	$\frac{1}{\sigma_1-\sigma_2}$	$\Delta\sigma_2$ daN/cm²	ΔS_2 cm	$1/\rho$ 1/m
a	2,266	−4,881	0,140	1,1850	42,5	−0,391
b	3,83306	−5,6539	0,1088	0,2923	54,0	−0,059
c	4,1815	−5,1624	0,1070	0,1669	56,0	−0,032
d	6,673	6,621	0,0752	−0,6567	52,0	+0,084
e	−0,9017	1,7116	−0,3826	1,1636	56,0	+0,208

2.6. EXEMPLUL 5. SUPRASTRUCTURA UNUI POD DALAT PENTRU UN PASAJ SUPERIOR

Pentru realizarea unui pasaj superior de șosea s-a studiat o variantă cu suprastructură realizată ca dală plină, avînd două deschideri 18,0+24,0 m, cu rezemarea intermediară a dalei direct pe o pilă îngustă (150×80 cm), structura avînd oblicitatea de 63° (fig. 2.39).

Dala este simplu rezemată pe culeea A și rezemată fix pe culeea C. Grosimea dalei variază de la 40 cm pe tot conturul la 100 cm în dreptul pilei centrale : variația grosimii este lineară în sens longitudinal între marginile rezemate, respectiv libere și pila centrală, intradosul fiind astfel o suprafață dublu riglată, avînd avantajul unei cofrări mai simple. Dala este precomprimată longitudinal în direcția $x-x$ și transversal după direcția oblică $y'-y'$ cu fascicule 36 ∅ 5 și 24 ∅ 5, avînd pas variabil și traseul curb.

Modelul de calcul indicat în figura 2.40 cuprinde 316 elemente finite tip dală încovoiată (patrulater), precum și 65 elemente finite

Scanned with OKEN Scanner

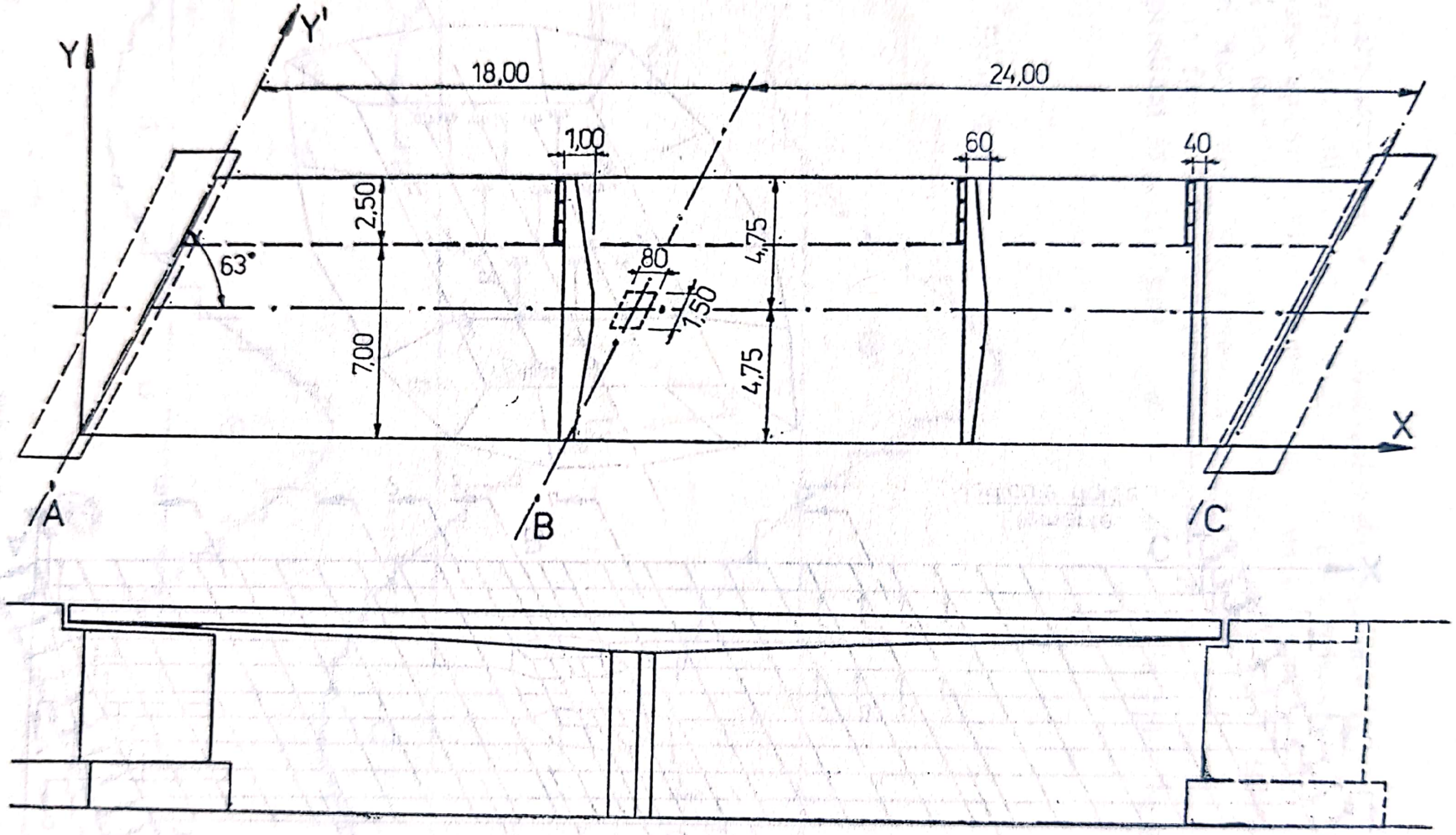


Fig. 2.39.

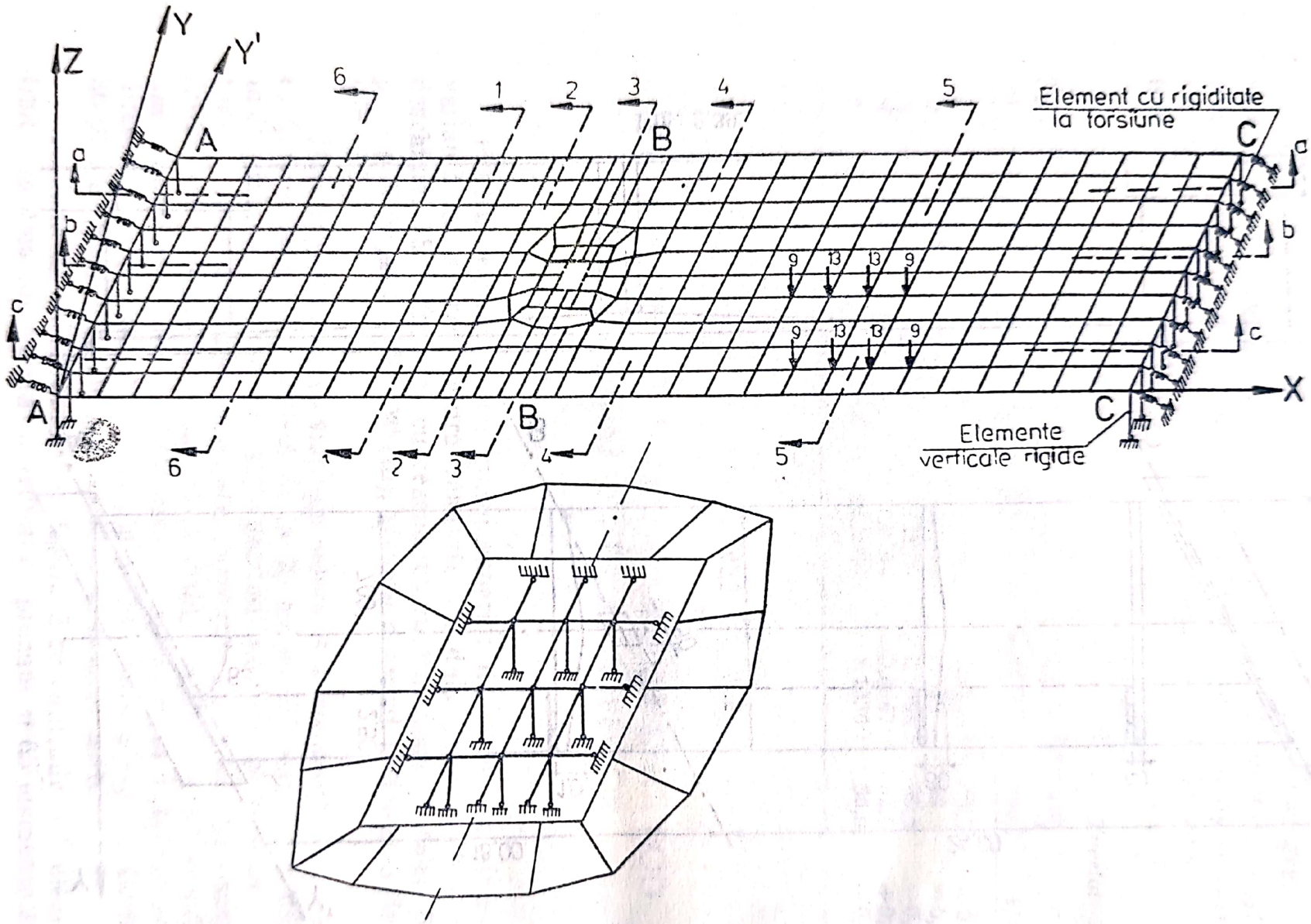

Z
Y
Y'
X
A
B
C
a
b
c
1
2
3
4
5
6
9
13
Element cu rigiditate la torsiune
Elemente verticale rigide

Fig. 2.40.

auxiliare pentru modelarea condițiilor de rezemare. Dintre acestea, 43 sînt penduli dispuși verticali sau în plan orizontal, iar 22 sînt resoarte spirală avînd numai rigiditatea la torsiune și sînt dispuși pe marginile rezemate, perpendicular pe laturile înclinate ale dalei. Acest exemplu s-a rulat cu programul SAP-4.

În figura 2.41 sînt trasate diagramele de momente în sens longitudinal M_{xx} în fîșiile $a-a$, $b-b$ și $c-c$, din acțiunea sarcinii

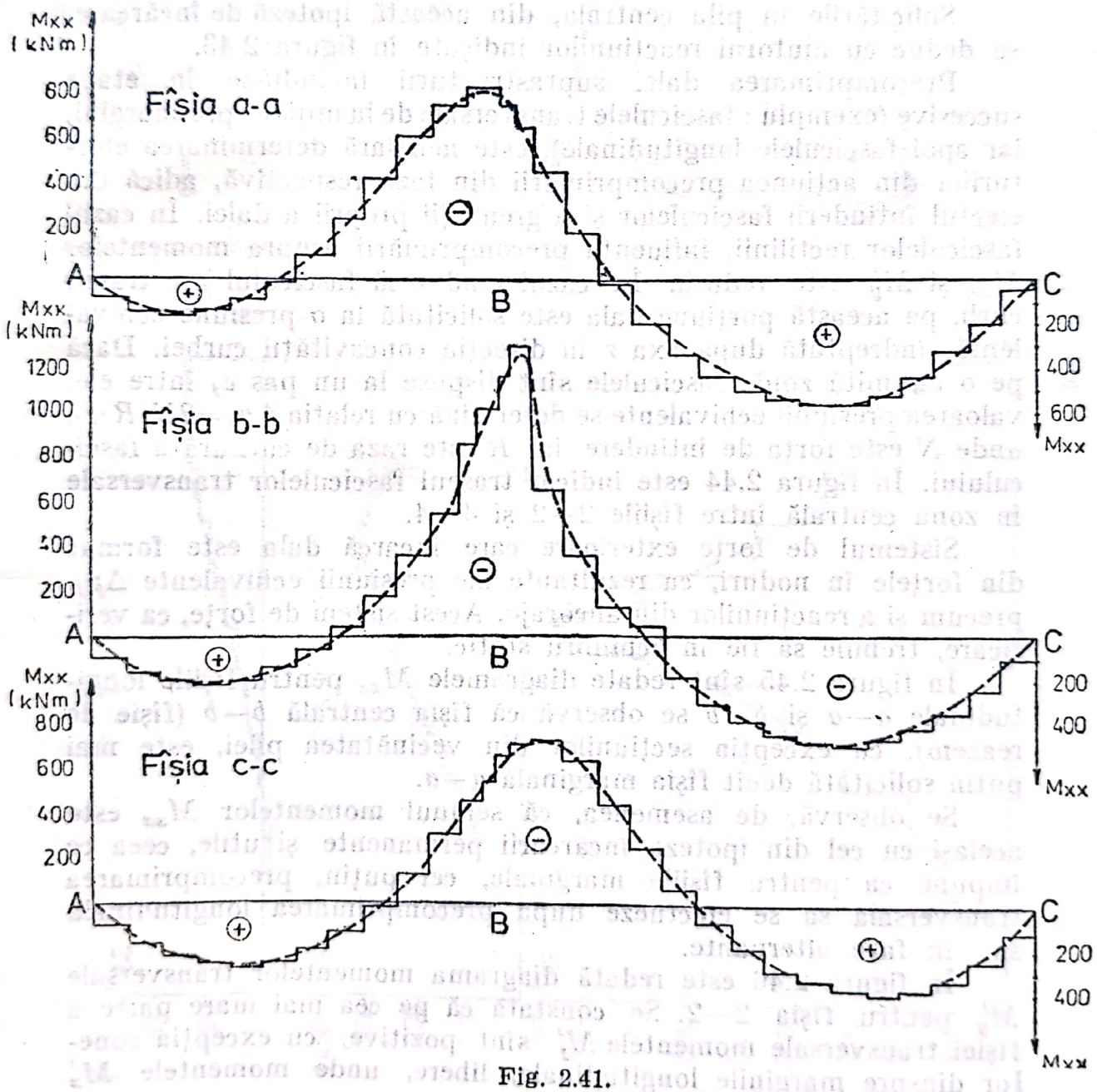


Fig. 2.41.

permanente și utile, respectiv vehicul V-80, echivalent cu încărcările în noduri, conform figurii 2.40. Deoarece programul afișează momentele M_{xx}, M_{yy} și M_{xy}, momentele încovoietoare în direcția $y'-y'$ s-au calculat cu relația:

$$M'_y = M_{yy} \cdot \cos^2 27° + M_{xx} \sin^2 27° + 2M_{xy} \cos 27° \sin 27°.$$

Figura 2.42 ilustrează diagramele momentelor M'_y pentru fîșiile transversale 1—1, 2—2, ..., 6—6.

Solicitările în pila centrală, din această ipoteză de încărcare, se deduc cu ajutorul reacțiunilor indicate în figura 2.43.

Precomprimarea dalei suprastructurii făcîndu-se în etape succesive (exemplu: fasciculele transversale de la mijloc spre margini, iar apoi fasciculele longitudinale), este necesară determinarea eforturilor din acțiunea precomprimării din faza respectivă, adică din efectul întinderii fasciculelor și a greutății proprii a dalei. În cazul fasciculelor rectilinii, influența precomprimării asupra momentelor M_{xx} și M'_y este redusă. În cazul cînd însă fasciculul are traseu curb, pe această porțiune dala este solicitată la o presiune echivalentă, îndreptată după axa z în direcția concavității curbei. Dacă pe o anumită zonă, fasciculele sînt dispuse la un pas e_j între ele, valoarea presiunii echivalente se determină cu relația $\Delta p_j = 2N/R \cdot e_j$, unde N este forța de întindere, iar R este raza de curbură a fasciculului. În figura 2.44 este indicat traseul fasciculelor transversale în zona centrală între fîșiile 2—2 și 4—4.

Sistemul de forțe exterioare care încarcă dala este format din forțele în noduri, ca rezultante ale presiunii echivalente Δp_j, precum și a reacțiunilor din ancoraje. Acest sistem de forțe, ca verificare, trebuie să fie în echilibru static.

În figura 2.45 sînt redate diagramele M_{xx} pentru fîșiile longitudinale $a-a$ și $b-b$ se observă că fîșia centrală $b-b$ (fîșie de reazem), cu excepția secțiunilor din vecinătatea pilei, este mai puțin solicitată decît fîșia marginală $a-a$.

Se observă, de asemenea, că semnul momentelor M_{xx} este același cu cel din ipoteza încărcării permanente și utile, ceea ce impune ca pentru fîșiile marginale, cel puțin, precomprimarea transversală să se efectueze după precomprimarea longitudinală sau în faze alternante.

În figura 2.46 este redată diagrama momentelor transversale M'_y pentru fîșia 2—2. Se constată că pe cea mai mare parte a fîșiei transversale momentele M'_y sînt pozitive, cu excepția zonelor dinspre marginile longitudinale, libere, unde momentele M'_x

Scanned with OKEN Scanner

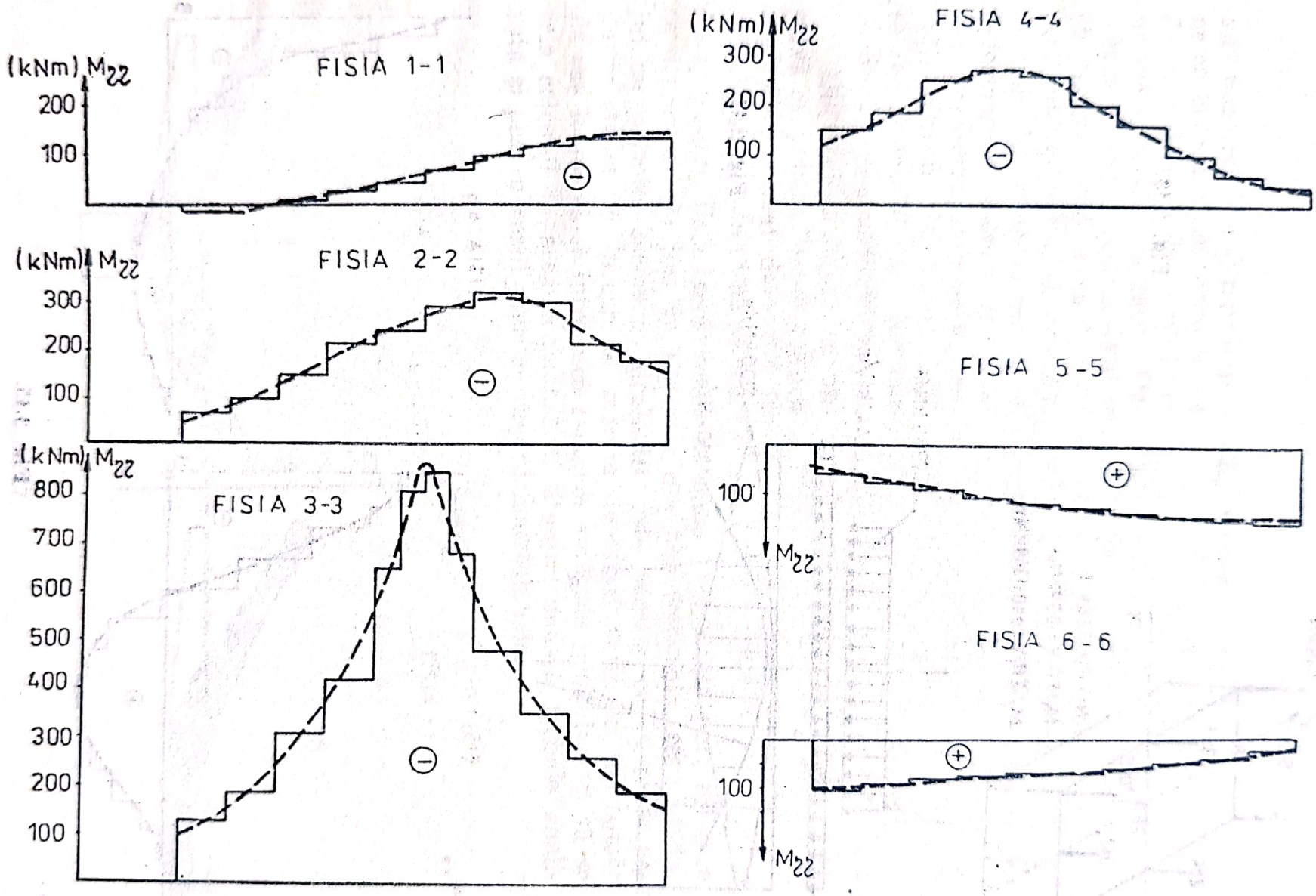


Fig. 2.42.

Scanned with OKEN Scanner

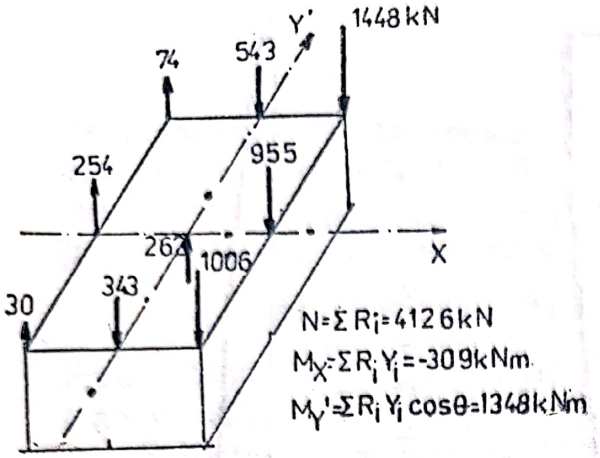


Fig. 2.43.

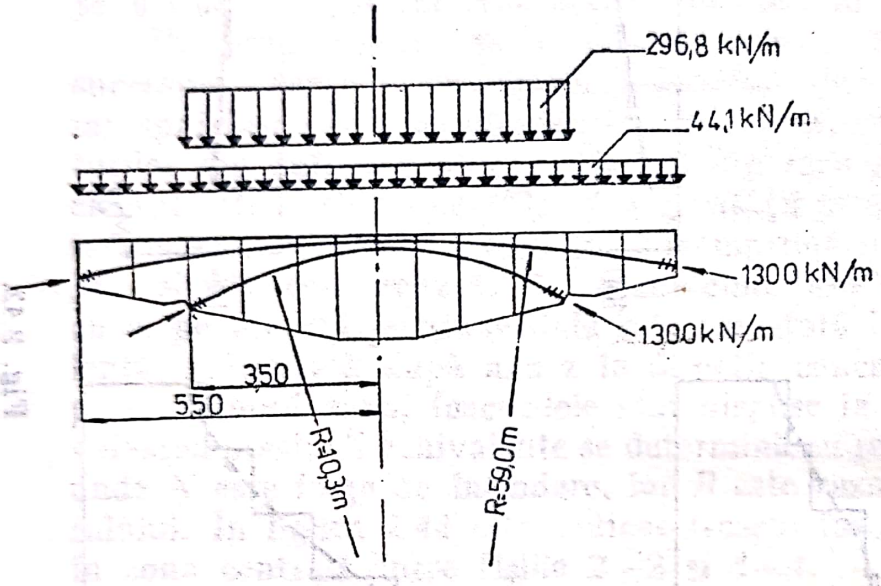


Fig. 2.44.

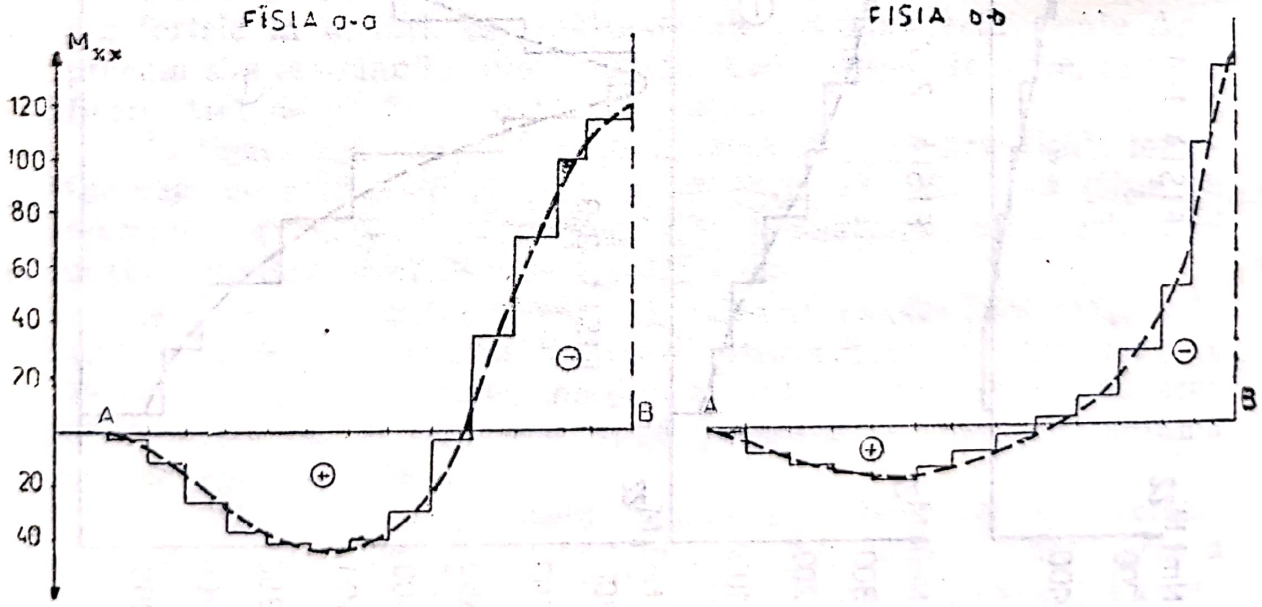


Fig. 2.45.

Scanned with OKEN Scanner

sînt negative. Acest fapt impune ca în sens transversal să se dispună și fascicule rectilinii la partea superioară a dalei. Deoarece precomprimarea dalei se efectuează cînd aceasta este susținută pe eșafodaj, este important de cunoscut modul de deformare al dalei sub acțiunea precomprimării și a greutății proprii. În figura 2.47 se indică modul de deformare în două fîșii transversale.

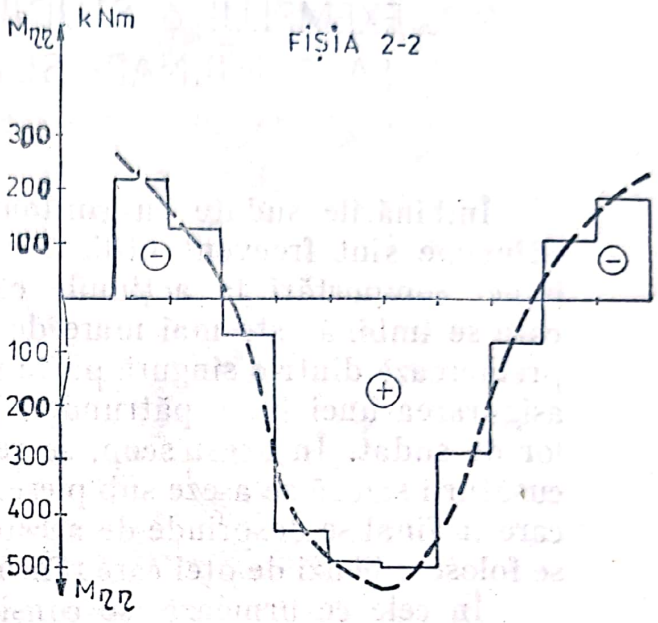


Fig. 2.46.

Din această figură se observă că, pentru fîșia de reazem 3—3 dala a avut deplasări în sus, desprinzîndu-se de pe eșafodaj. Pentru fîșia transversală de cîmp 1—1 există porțiuni care se deplasează în jos. În situația, cea mai frecventă, că eșafodajul nu permite asemenea deplasări, este necesar ca în toate nodurile structurii în care ar rezulta deplasări verticale îndreptate de sus în jos să se introducă reazeme verticale pendulare și să se reia calculul în această ipoteză. O situație similară trebuie analizată și pentru cazul precomprimării longitudinale.

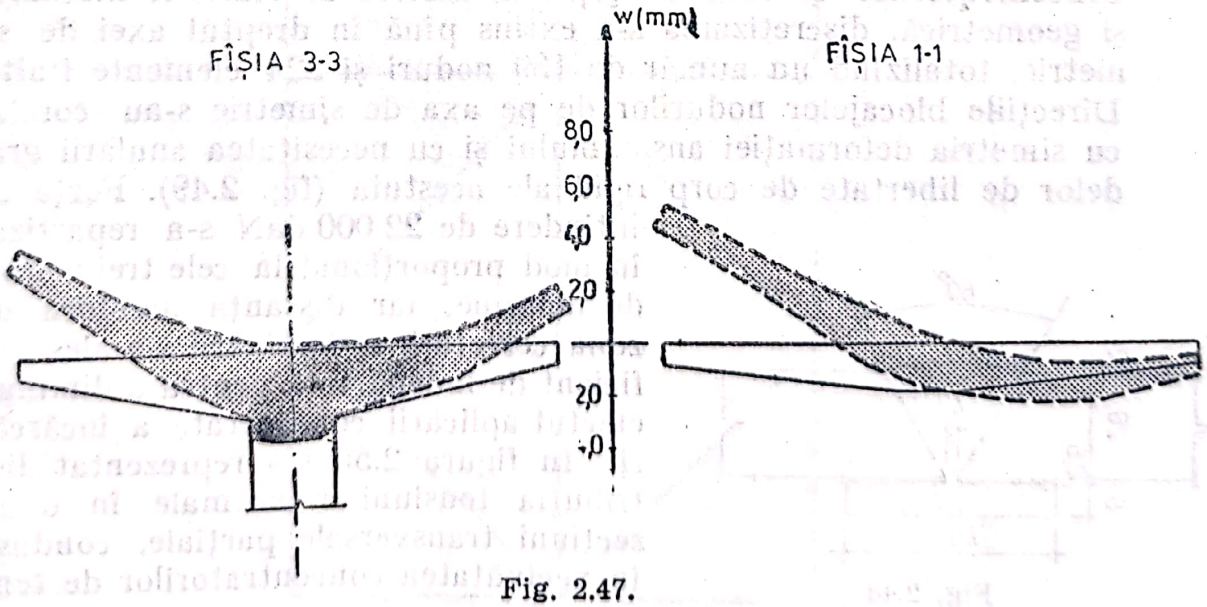


Fig. 2.47.

Scanned with OKEN Scanner

2.7. EXEMPLUL 6. STUDIUL STĂRII DE EFORTURI LA O ÎMBINARE SUDATĂ

Îmbinările sudate cu cordoane de sudură cap la cap sau în adîncime sînt frecvent utilizate în construcţiile metalice, datorită bunei comportări la acţiunile exterioare. Dacă grosimea pieselor care se îmbină este mai mare de 4 ... 8 mm, marginile acestora se prelucrează dintr-o singură parte sau din ambele părţi, urmărindu-se asigurarea unei bune pătrunderi a sudurii pe toată grosimea pieselor de sudat. În acest scop, se recomandă să se resudeze rădăcina cusăturii sau să se aşeze sub piesele care se sudează o placă de cupru care în final se desprinde de acestea ; uneori, în locul plăcii de cupru se folosesc benzi de oţel care rămîn sudate de piesele care se îmbină.

În cele ce urmează se consideră pentru studiu două benzi de oţel OL37, avînd 75 mm lăţime şi 20 mm grosime care se sudează cap la cap, utilizînd ca placă suport o bandă de oţel de 6 mm grosime şi 40 mm lăţime. Figura 2.48 ilustrează conturul ipotetic al pieselor după efectuarea sudurii : suprafaţa exterioară a cordonului de sudură are o supraînălţare de numai 2 mm, extinsă pe lungimea definită de unghiul de 60°, iar între piesele îmbinate în plăcuţa suport s-a presupus un interspaţiu final de 0,5 mm.

Împărţirea în elemente finite triunghiulare s-a făcut urmărind o reţea de izostatice ipotetică, îndesînd elementele finite în dreptul concentratorilor de tensiune [1]. Din motive de simetrie mecanică şi geometrică, discretizarea s-a extins pînă în dreptul axei de simetrie, totalizînd un număr de 139 noduri şi 224 elemente finite. Direcţiile blocajelor nodurilor de pe axa de simetrie s-au corelat cu simetria deformaţiei ansamblului şi cu necesitatea anulării gradelor de libertate de corp rigid ale acestuia (fig. 2.49). Forţa de întindere de 22 000 daN s-a repartizat în mod proporţional la cele trei noduri de margine, iar distanţa acestora de zona cercetată a îmbinării s-a ales suficient de îndepărtată pentru a diminua efectul aplicării concentrate a încărcării. În figura 2.50 s-a reprezentat distribuţia tensiunilor normale în două secţiuni transversale parţiale, conduse în vecinătatea concentratorilor de ten-

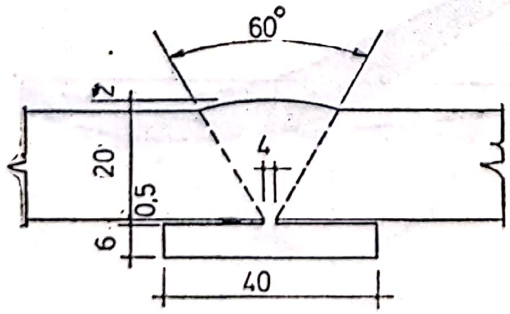


Fig. 2.48.

Scanned with OKEN Scanner

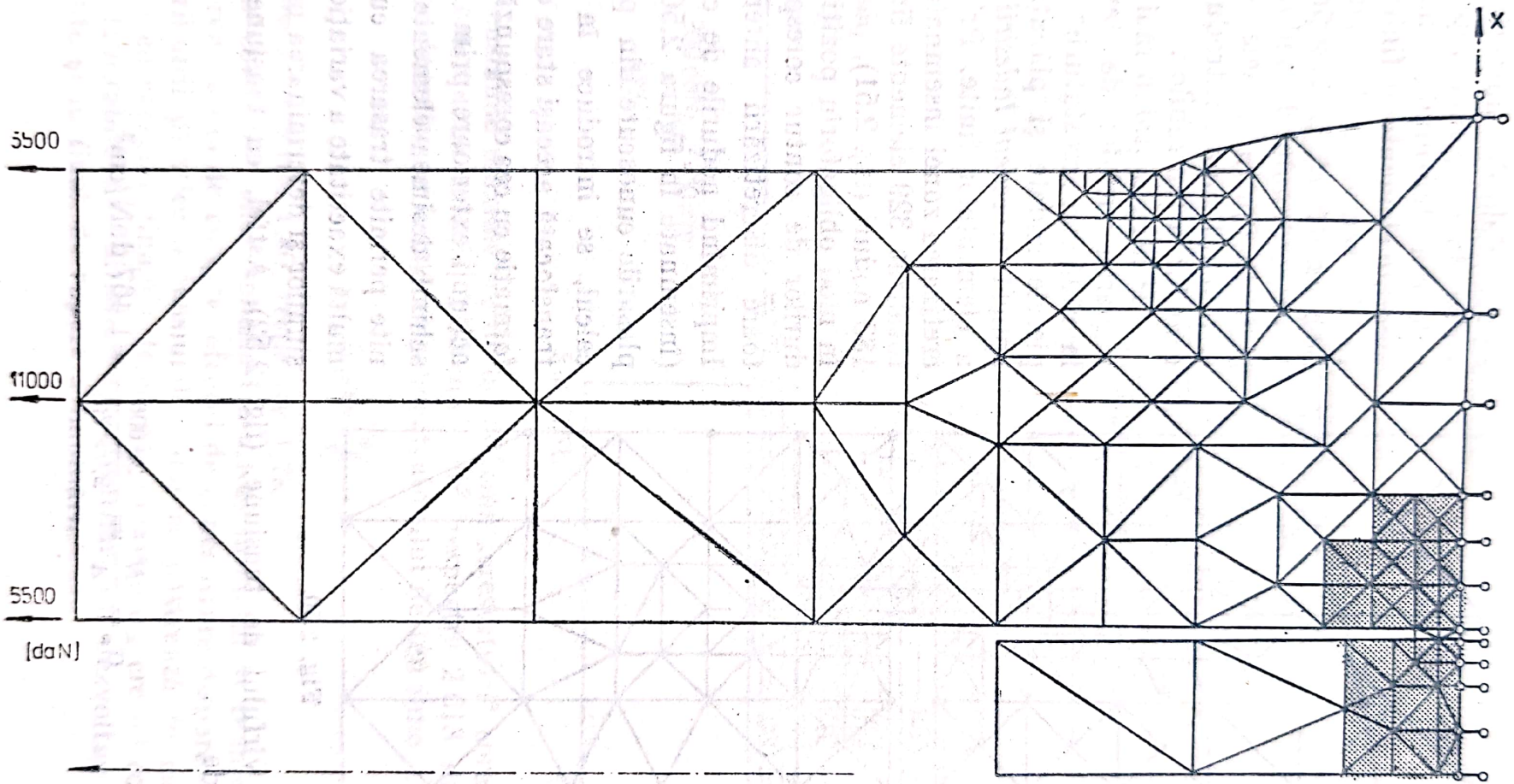


Fig. 2.49.

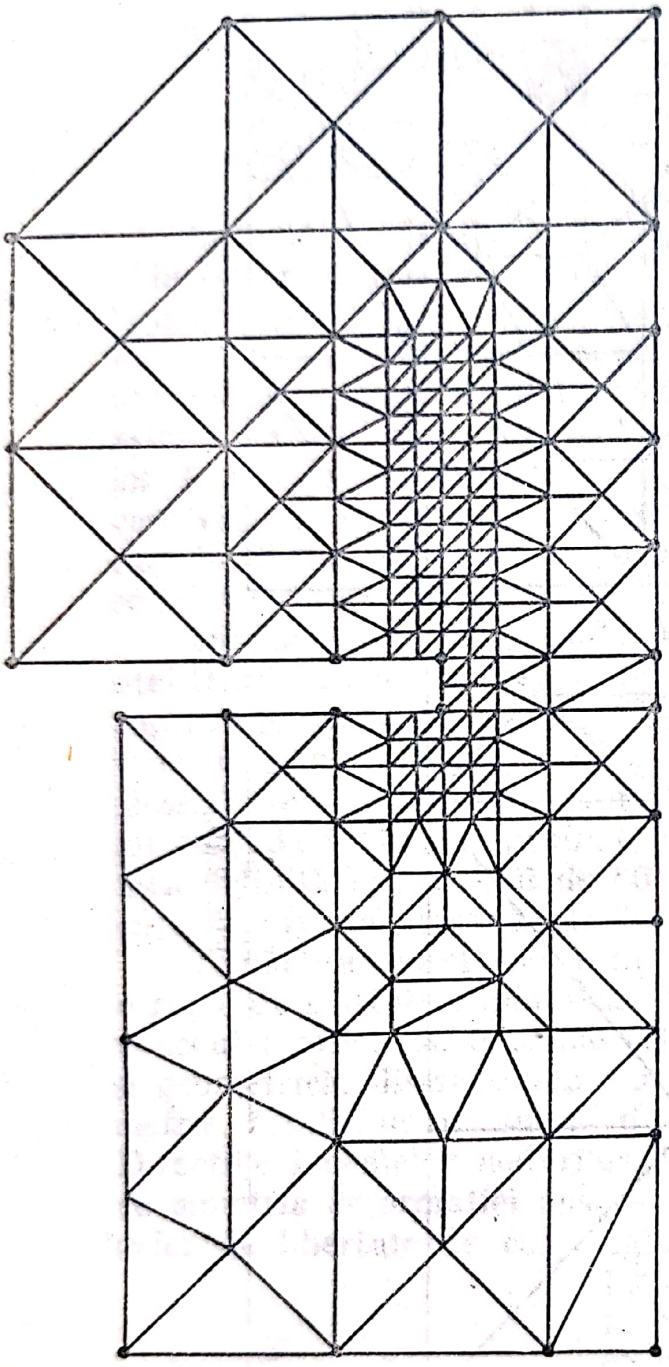


Fig. 2.50.

siune. Valorile numerice înscrise în diagramă reprezintă valoarea tensiunilor normale aferente elementelor finite tăiate de secțiunea transversală. Se constată că atît supraînălțarea cordonului de sudură, cît și fanta dintre piesele sudate și plăcuța suport introduc concentrări a tensiunilor.

Pentru a stabili mai exact valoarea vîrfului de tensiune la rădăcina „crestăturii" dintre piesele sudate și plăcuță, s-a aplicat *procedeul îndesirii locale* a elementelor finite. Prin discretizarea zonei însemnate s-au totalizat 329 elemente finite și 183 noduri (fig. 2.51), păstrînd în mod obligatoriu poziția nodurilor de contur corespunzătoare discretizării anterioare. Imprimînd nodurile de contur (însemnate în figura 2.50) deplasările cunoscute din primul calcul, se introduce în zona transfocată aceeași stare de deformație cu cea corespunzătoare acțiunii exterioare primare, în schimb desimea elementelor finite permite trasarea cu mai multă exactitate a variației tensiunilor și determinarea mai corectă a vîrfului de tensiune. (fig. 2.52). Astfel, cu tensiunea nominală de

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{22\,000}{2{,}0 \times 7{,}5} = 1\,467 \text{ daN/cm}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

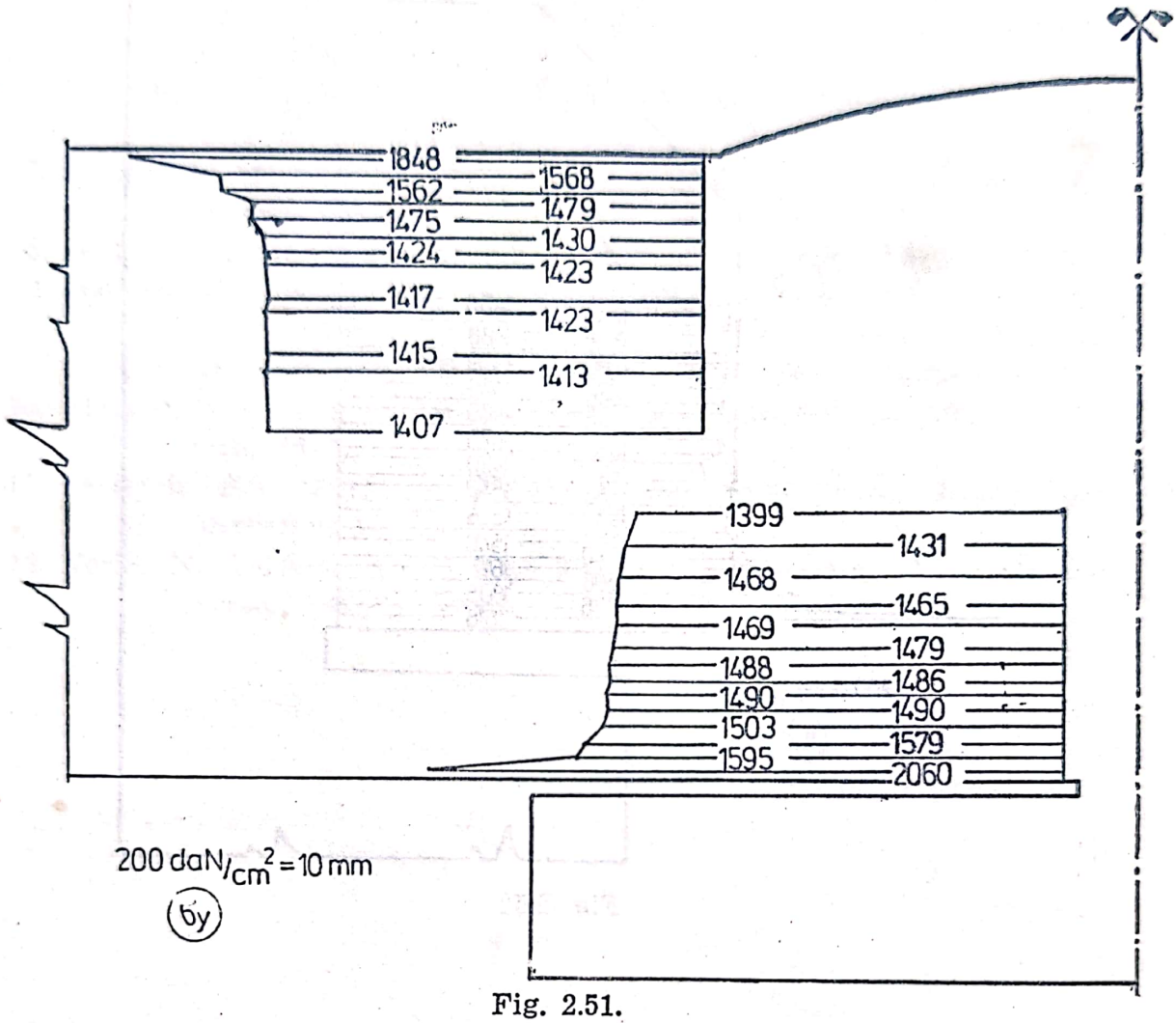


Fig. 2.51.

și cu tensiunile maxime σ_N de la rădăcina „crestăturii" corespunzătoare celor două calcule, 2 060 daN/cm², respectiv 2 618 daN/cm², factorul teoretic de formă al concentratorului de tensiune

$$K_{t0} = \frac{\sigma_N}{\sigma_n}$$

conduce la valorile 1,40, respectiv 1,78.

În condițiile unor solicitări statice, la metalele tenace, după atingerea limitei de curgere, efectul de concentrare dispare datorită redistribuirii plastice a tensiunilor, dar se păstrează în cazul acțiunilor cu caracter dinamic, tensiunea maximă σ_N creînd condițiile locale favorabile de inițierea microfisurilor, de dezvoltarea celor existente și în final, de ruperea îmbinării.

Scanned with OKEN Scanner

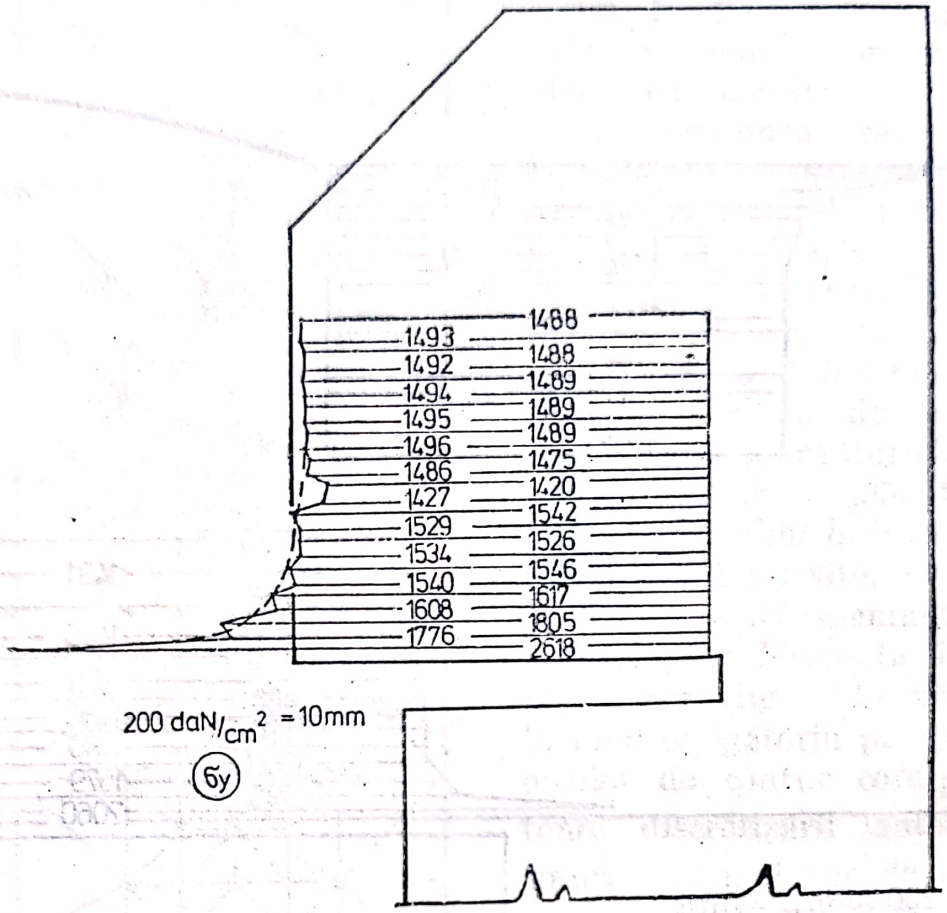


Fig. 2.52.

Bibliografie

1. Appeltauer, I., Cuteanu, E., Gerner, D., Munteanu, I., *Aplicarea metodei elementelor finite la studiul concentratorilor de tensiune în cîteva îmbinări sudate.* Bul. șt. tehn. al I.P. „Traian Vuia" Timișoara, tom. 21(35), Seria construcții, 1, 1976.
2. Boleanțu, L., Dobre, I. *Aplicații ale mecanicii solidului deformabil în construcția de mașini,* Ed. Facla, Timișoara, 1978.
3. Boleanțu, L., Kasztell, O. *Comparație între efectul concentrării tensiunilor la un model plan și la unul spațial,* Studii și cercetări de metalurgie, tom 17, nr. 1, 1972.
4. Dantu, P. *Note sur la rectification des curbes experimentales,* Analyse des contraintes, Paris, 7, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

5. Durelli, A.J., Phillips, E., Tsao, C. *Introduction to the Theoretical and Experimental Analyses of Stress and Strain*, Mc. Graw-Hill Book Company, New York—London, 1958.
6. Fink, K., Rohrbach, C. *Handbuch der Dehnungs-und Spannungsmessungen*, Düsseldorf, V.D.I. Verlag, 1959.
7. Hetényi, M. *Handbook of experimental Stress Analysis*, New-York, Sohn Wiley & Sons, 1950.
8. Iosipescu, N. *Introducere în fotoelasticitate*, Ed. tehnică, București, 1960.
9. Marinov, R. *Fundație din beton precomprimat pentru standul de încercat și rulat vagoane la Intreprinderea I.V.Arad*, Conferința VIII-a de Betoane; Simpozionul de Beton Precomprimat, Cluj-Napoca, 1977.
10. Mocanu, D.R., ș. a. *Analiza experimentală a tensiunilor*, Ed. tehnică, București, 1977.
11. Theocaris, P.S. *Stress Singularities at Concentrated Loads*, Experimental Mechanics, 12, 1973.
12. Vocke, N., Ullmann, K. *Experimentelle Dehnungsanalyse*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

Utilizarea procedeului de calcul prin divizarea în substructuri

3.1. GENERALITĂȚI

Pentru structurile complexe, cu un număr foarte mare de elemente finite sau cu o diversitate de tipuri de elemente finite, aplicarea procedeului de *divizare în substructuri* apare ca o necesitate ; rezolvarea problemei stării de tensiune pe o singură structură complexă nu poate fi efectuată în acest caz, datorită depășirii capacității memoriei interne a calculatorului sau măririi excesive a timpului de calcul prin apelarea prea frecventă la memoriile externe. Divizarea în substructuri constituie o soluție optimă de organizare a calculului și utilizare a calculatorului electronic [9, 12].

Acest procedeu este indicat și în alte situații, spre exemplu, cînd din întreaga structură interesează în mod deosebit o anumită zonă sau în cazul cînd întreaga structură este alcătuită prin repetarea unei anumite porțiuni. De asemenea, în analiza dinamică a structurilor compuse din porțiuni cu flexibilitate mare (frecvențe proprii joase) și porțiuni mai rigide (frecvențe proprii ridicate) este necesară divizarea în substructuri. În principiu, analiza prin divizare în substructuri comportă două etape :

— *analiza stării de tensiune și deformație* pentru fiecare substructură separat și

Scanned with OKEN Scanner

— *cuplarea substructurilor*, astfel ca în zonele de intersecție (noduri comune) să fie respectate condițiile de echilibru și de continuitate a deplasărilor.

Procedeul de divizare în substructuri s-a aplicat la început în tehnica aeronautică, fiind ulterior asimilat și pentru structurile construcțiilor.

În cele ce urmează se prezintă procedeul general de calcul prin divizare în substructuri, precum și unele simplificări în cazuri mai particulare.

3.2. PROCEDEUL GENERAL DE CALCUL

Pentru o substructură făcînd parte din structura complexă, nodurile situate pe marginile comune cu substructurile învecinate se definesc ca *noduri de contact*, în timp ce restul nodurilor se definesc ca *noduri interioare* (fig. 3.1).

Mărimile referitoare la nodurile de contact vor avea în continuare indicele I, iar cele referitoare la nodurile interioare indicele N.

În prima etapă de calcul se va considera fiecare substructură separat, avînd nodurile de contact blocate și fiind solicitată de încărcarea exterioară corespunzătoare ; în acest fel, prin rezolvarea pentru fiecare substructură a sistemului de ecuații :

$$K^m_{N,N}\{\delta^m_N\}=\{L^m_N\}, \tag{3.1}$$

vor rezulta reacțiunile $\{R^m\}$ în nodurile de contact blocate.

În relația (3.1) s-a notat cu :

$K^m_{N,N}$ — matricea de rigiditate a substructurii „m“, avînd nodurile de contact blocate,

$\{\delta^m_N\}$ — vectorul deplasărilor nodurilor interioare,

$\{L^m_N\}$ — vectorul încărcărilor exterioare, acționînd în nodurile interioare,

$\{\bar{R}^m\}$ — vectorul reacțiunilor ce apar în nodurile blocate.

Scanned with OKEN Scanner

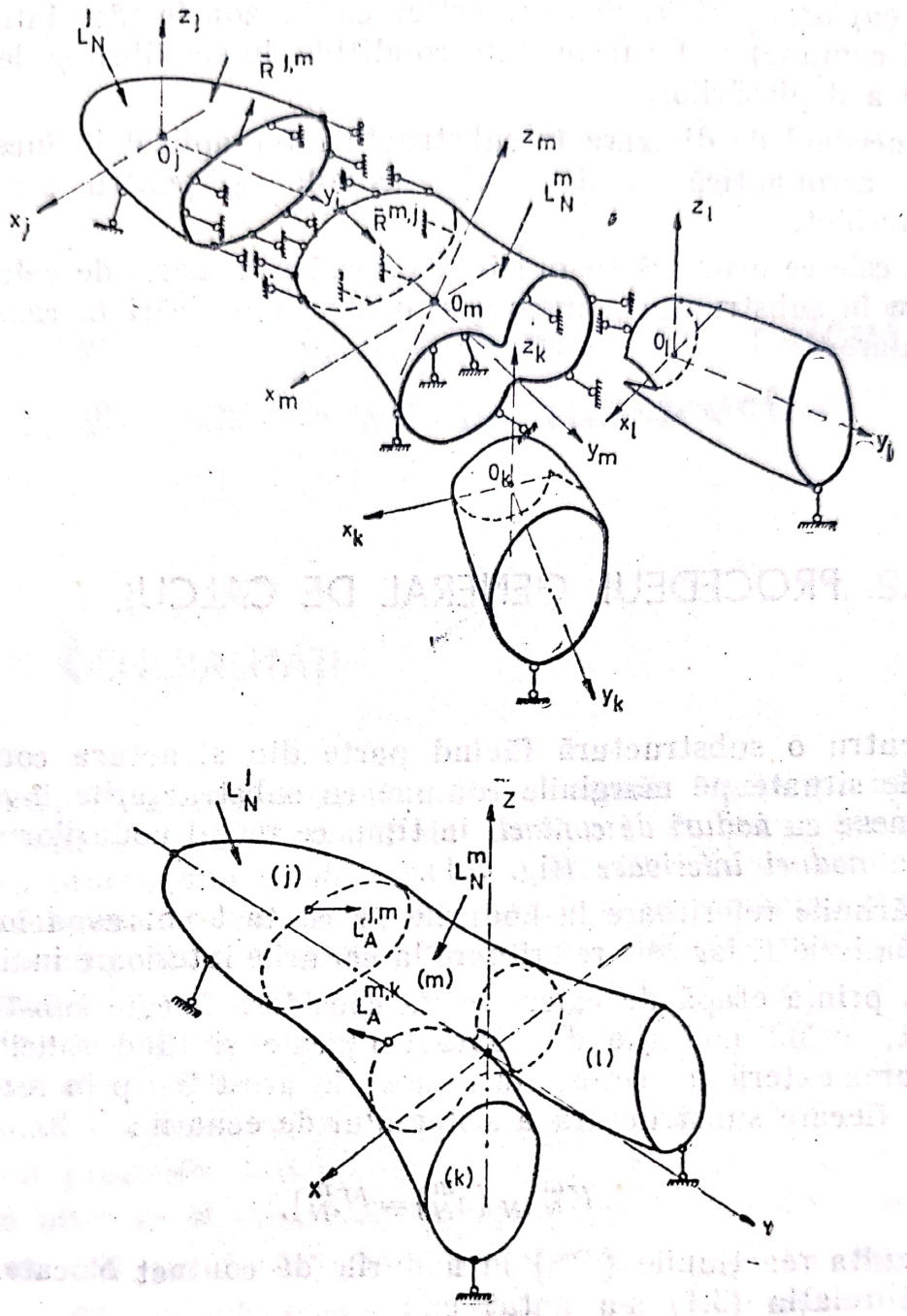


Fig. 3.1.

Dacă substructura „m" are zone de contact (interfețe) cu substructurile j, k, ..., atunci vectorul $\{\bar{R}^m\}$ este de forma

$$\{\bar{R}^m\} = \{\bar{R}^{m,j}, \bar{R}^{m,k}, \bar{R}^{m,e},\}. \tag{3,2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde :

$\{\bar{R}^{m,j}\}$ — este vectorul reacțiunilor din nodurile blocate situate pe interfața $m-j$.

În mod similar, pentru substructura „j" va rezulta la aceeași interfață $m-j$ reacțiunea $\{\bar{R}^{j,m}\}$. Condiția de echilibru a interfeței $m-j$ este :

$$\{\bar{R}^{m,j}\}+\{\bar{R}^{j,m}\}+\{L_A^{m,j}\}=0, \qquad (3.3)$$

unde $\{L_A^{m,j}\}$ este vectorul încărcării „adiționale" acționînd asupra interfeței $m-j$.

În acest fel, cuplînd toate substructurile în structura generală, pentru a avea echilibru la interfețe este necesară introducerea încărcării adiționale $\{L_A\}=\{L_A^{1,2}, L_A^{2,3}, \ldots, L_A^{m,j}, \ldots, L_A^{p,n}\}$.

După cuplarea substructurilor, nodurile de contact se deblochează, rezultînd deplasările $\{\delta_I^m\}$, astfel încît să se realizeze continuitatea deplasărilor și implicit a deformațiilor la interfețele substructurilor. Condiția de continuitate a deplasărilor se scrie :

$$\{\delta_I\}=[a]\ \{r\}, \qquad (3.4)$$

unde :

$\{\delta_I\}$ — este vectorul deplasărilor nodurilor de contact ale tuturor interfețelor, definite într-un sistem de referință local (x, y, z),

$\{r\}$ — este vectorul deplasărilor nodurilor de contact ale structurii generale definite într-un sistem de referință global (X, Y, Z),

$[a]$ — este matricea de transformare a deplasărilor.

Această matrice de transformare reflectă atît proprietățile topologice ale structurii (modul de notare a nodurilor în cadrul structurii generale și în cadrul fiecărei substructuri), precum și transformarea coordonatelor din sistemul local (x, y, z) în sistemul global (X, Y, Z).

Prin condiția de continuitate (3.4), în structura generală apar ca necunoscute numai deplasările nodurilor de contact ; din această cauză, este necesară reformularea matricei de rigiditate a substructurilor prin eliminarea deplasărilor nodurilor interioare $\{\delta_N^m\}$, procedeu denumit și *condensare statică*. În acest scop, matri-

Scanned with OKEN Scanner

cea unei substructuri se partiționează după gradele de libertate ale nodurilor de contact și interioare, astfel :

$$K^m = \begin{bmatrix} K^m_{NN}, & K^m_{N.I} \\ K^m_{I,N} & K^m_{I,I} \end{bmatrix}; \quad \{\delta^m\} = \begin{Bmatrix} \delta^m_N \\ \delta^m_I \end{Bmatrix}. \tag{3.5}$$

Avînd în vedere că în nodurile de contact după deblocare apar reacțiunile finale $\{R^m\}$, alături de încărcările exterioare direct aplicate în aceste noduri, $\{L^m_N\}$, sistemul de ecuații de condiție (3.1) pentru substructura „m" devine :

$$K^m_{N,N}\{\delta^m_N\} + K^m_{N,I}\cdot\{\delta^m_I\} = \{L^m_N\} \tag{3.6a, b}$$

$$K^m_{I,N}\{\delta^m_N\} + K^m_{I,I}\cdot\{\delta^m_I\} = \{L^m_I\} + \{R^m\}.$$

Din prima ecuație se obține expresia lui $\{\delta^m_N\}$

$$\{\delta^m_N\} = [K^m_{N,N}]^{-1}\cdot\{L^m_N\} - [K^m_{NN}]^{-1}K^m_{N,I}\cdot\{\delta^m_I\}$$

sau

$$\{\delta^m_N\} = \{\bar{\delta}^m_N\} - G^m_{N,I}\{\delta^m_I\}, \tag{3 7a, b}$$

unde : $\{\bar{\delta}^m_N\}$ este vectorul deplasărilor nodurilor interioare în ipoteza nodurilor de contact blocate și

$G^m_{N,I} = -[K^m_{N,N}]^{-1}\cdot K^m_{N,I}$ este matricea de influență a deplasărilor nodurilor interioare datorită deplasării unitare a nodurilor de contact.

Înlocuind (3.7a) în (3.6a) se obține ·

$$(K^m_{I,I} + K^m_{I,N}G^m_{N.I})\cdot\{\delta^m_I\} = \{L^m_I\} + \{R^m\} - K^m_{I,N}[K^m_{N.N}]^{-1}\cdot\{L^m_N\}. \tag{3.8}$$

Relația (3.8) se mai poate scrie

$$\tilde{K}^m_{I,I}\{\delta^m_I\} = \{L^m_{I,N}\} + \{R^m\}, \tag{3.9}$$

unde :

$$\tilde{K}^m_{I,I} = K^m_{I,I} + K^m_{I,N}\cdot G^m_{N,I} \tag{3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

și este denumită matricea de rigiditate „condensată" a substructurii „m", iar

$$\{L^m_{I,N}\}+\{L^m_I\}+G^m_{N,I}{}^T\cdot\{L^m_N\} \tag{3.11}$$

este vectorul de încărcare total la interfețele substructurii „m". Reacțiunile $\{R^m\}$ sînt necunoscute, valorile lor rezultînd în urma rezolvării structurii globale. Numărul vectorilor componenți $\{R^{m,k}\}$ este egal cu numărul interfețelor comune substructurii „m". Este de remarcat faptul că matricea de rigiditate condensată $\tilde{K}^m_{I,I}$ este de ordinul $N^m_i \times q$, unde N^m_i este numărul nodurilor de contact ale substructurii „m", iar q este numărul gradelor de libertate ale unui nod. Astfel, numărul N^m_i este mult mai mic decît numărul total al nodurilor unei substructuri.

În vederea *asamblării* substructurilor în structura globală, adică a determinării deplasărilor nodurilor de contact, pe lîngă condiția de continuitate (3.4), care este formulată numai din punct de vedere cinematic este necesară exprimarea condițiilor de echilibru pentru întreaga structură. Această condiție de echilibru se scrie astfel

$$U\{R\}=\{L_A\}, \tag{3.12}$$

unde :

$$\{R\}=\{R^1, R^2, \ldots, R^m, \ldots, R^n\} \tag{3.13}$$

este vectorul asamblat al reacțiunilor fiecărei substructuri, în total fiind n substructuri

$$\{L_A\}=\{L^{1,2}_A, L^{2,3}_A, \ldots, L^{m,j}_A \ldots, L^{p,n}_A\} \tag{3.14}$$

este vectorul încărcării neechilibrate de pe fiecare interfață. Vectorul $\{L^{m,j}_A\}$ se determină în prima etapă cu relația (3.3.)

U — este matricea de transformare a forțelor din substructuri din încărcări exterioare.

În conformitate cu cele stabilite în capitolul 1, între matricele U și $[a]$ există relația:

$$U=[a]^T. \tag{3.15}$$

Explicitînd pe $\{R^m\}$ din (3.9) și ținînd cont de (3.13) es obține relația (3.12) sub forma :

$$[U^1, U^2, \ldots, U^m, \ldots, U^n,]\cdot\{R^1, R^2, \ldots, R^m, \ldots, R^n\}=\{L_A\}. \tag{3.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru substructura „m" se obține astfel:

$$U_I^m \tilde{K}_I^m \{\delta_I^m\} - U_I^m \{L_{I,N}^m\} = \{L_A^{mj}, L_A^{mk}, \ldots, L_A^{ms}\}. \quad (3.17)$$

Deplasările $\{\delta_I^m\}$ se exprimă prin relația (3.4) în funcție de deplasările $\{r\}$ în sistemul de referință general. Astfel, se obține pentru întreaga structură, din relația (3.12) și (3.16), sistemul de ecuații

$$U_I \tilde{K}_{I,I} [U_I]^T \{r\} = U_I \{L_{I,N}\} + \{L_{I,A}\} \quad (3.17\ a)$$

sau într-o formă mai concentrată

$$K_{I,I}^c \{r\} = \{L_I^c\}, \quad (3.18)$$

unde:

$$K_{I,I}^c = U_I \tilde{K}_{I,I} \cdot U_I^T = \sum_{m=1}^{n} U_I^m \tilde{K}_{I,I}^m [U_I^m]^T, \quad (3.19)$$

iar

$$\{L_I^c\} = U_I \{L_{IN}\} + \{L_{IA}\} = \sum_{m=1}^{n} U_I^m \{L_{IN}^m\} + \{L_{IA}\}. \quad (3.20)$$

În (3.18) matricea $K_{I,I}^c$ este matricea de rigiditate „condensată" a structurii generale (asamblate), iar vectorul $\{L_I^c\}$ semnifică încărcarea exetrioară echivalentă pentru structura generală. Matricea $K_{I,I}^c$ are ordinul $NC \times q$, unde NC este numărul total al nodurilor de contact și este egal cu:

$$NC = NC\,(1,2) + NC(2,3) + \ldots + NC\,(m,j) + \ldots + NC(p,n), \quad (3.21)$$

$NC(m,j)$ fiind numărul nodurilor de contact de pe interfața comună substructurilor m și j, iar q numărul gradelor de libertate ale unui nod.

Trebuie remarcat faptul că numărul nodurilor de contact NC este mult mai redus decît numărul tuturor nodurilor structurii globale, fapt ce justifică adaptarea procedeului de divizare în substructuri în cazul structurilor cu complexitate mai mare, reducînd foarte mult volumul de operații și reclamînd în consecință o capacitate de memorare mai redusă. Prin rezolvarea sistemului de ecuații (3.18), cu valorile deplasărilor $\{r\}$ cunoscute, se determină pentru fiecare substructură în parte deplasările nodurilor de contact și a celor interioare cu relațiile:

$$\{\delta_I^m\} = [a^m]\{r\} = [U^m]^T \cdot \{r\}$$

$$\{\delta_N^m\} = [K_{N,N}^m]^{-1} \cdot \{P_N^m\} - [K_{N,N}^m]^{-1} \cdot K_{N,I}^m \{\delta_I^m\}. \quad (3.22\ a, b)$$

Scanned with OKEN Scanner

Reacțiunile finale în nodurile de contact și eforturile unitare pentru fiecare substructură se determină astfel:

$$\{R^m\}=\tilde{K}^m_{I,I}\{\delta^m_I\}-\{L^m_I\}-G^m_{N,I}\cdot\{L^m_N\} \tag{3.23}$$

$$\{\sigma^m\}=D^m\cdot B^m\{\delta^m_I \mid \delta^m_N\}, \tag{3.24}$$

matricele B^m și D^m fiind definite în capitolul 1. În ceea ce privește matricea de transformare $[a]$, care are o expresie similară cu matricea $[a]$ definită în paragraful 1.7, referitor la asamblarea elementelor finite, va opera acum asupra substructurilor, considerate ca elemente finite complexe sau *hiperelemente*.

Astfel:

1) Matricea $[a^m_1]$ selectează din vectorul deplasărilor $\{r\}$ pe acelea care corespund nodurilor substructurii „m"; această matrice este de tip booleană (cu coeficienți 0 sau 1), a cărei conformare reflectă proprietățile topologice ale structurii, adică modul de notare a nodurilor de contact în structura generală, respectiv în substructuri. Spre exemplu, dacă un nod de contact are numărul de ordine „16", în topologia structurii generale și numărul de ordine „5" în substructura „2", atunci matricea $[a^2_1]$ va avea coeficientul 1 la intersecția coloanei 16 cu linia 5.

2) Matricea $[a^m_2]$ transformă mărimile și caracteristicile substructurii definite în sistemul cartezian local de referință $(x\ y\ z)$, în mărimi corespunzătoare definite în raport cu sistemul global de referință $(X\ Y\ Z)$. În cazul cel mai general, pentru o substructură „m" elementele caracteristice (matrice de rigiditate, de tensiune) pot fi definite în raport cu vectorul deplasărilor generalizate $\{\alpha^m\}$, încît deplasările nodurilor substructurii $\{\delta^m\}$ în sistemul de referință local se corelează cu vectorul deplasărilor generalizate $\{\alpha^m\}$ prin relația:

$$\{\delta^m\}=T_{\delta\alpha}\{\alpha^m\}, \tag{3.25}$$

matricea $T_{\delta\alpha}$ fiind matricea de transformare din sistemul de referință intrinsec în sistemul local cartezian.

Matricea de rigiditate a substructurii definită în raport cu un sistem de referniță intrinsec și în corelație cu deplasările generalizate $\{\alpha\}$, se notează în continuare cu $[k^m]$; pentru matricea de rigiditate K^m_{xyz} definită în corelație cu deplasările $\{\delta^m\}$, se obține:

$$K^m_{xyz}=T^T_{\delta\alpha}\cdot[k^m]\cdot T_{\delta\alpha}. \tag{3.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deplasările nodurilor în sistemul global de referință $OXYZ'$ $\{r^m\}$ se determină din vectorul deplasărilor $\{\delta^m\}$ prin transformarea de cordonate T_c astfel :

$$\{r^m\}=T_c\,\{\delta^m\}. \tag{3.27}$$

Notînd cu L matricea de transformare pentru un nod, în cazul general al nodurilor cu 6 grade de libertate conform [19], se obține

$$L=\left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right]_{6\times 6}, \tag{3.28}$$

unde $[\lambda]$ este matricea cosinilor directori ai acelor xyz față de axele XYZ :

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} \lambda_{xX}, & \lambda_{xY}, & \lambda_{xZ} \\ \lambda_{yX}, & \lambda_{yY}, & \lambda_{yZ} \\ \lambda_{zX}, & \lambda_{zY}, & \lambda_{zZ} \end{bmatrix}_{(3\times 3)}. \tag{3.29}$$

În cazul cînd nodurile au numai 3 grade de libertate (dale încovoiate, starea de membrană), rotația axelor fiind într-un plan, L devine :

$$L=\begin{bmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta, & 0 \\ \sin\theta, & \cos\theta, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

unde θ este unghiul de rotație al axelor în planul $Z-O$.

Matricea de transformare T_c se obține prin asamblarea matricelor L

$$T_c=\begin{bmatrix} L^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^T & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L^T \end{bmatrix}_{(6n\times 6n)}, \tag{3.31}$$

unde n — este numărul nodurilor de contact ale structurii.

Matricea de rigiditate a substructurii în coordonatele globale XYZ se determină cu relația

$$K^m_{XYZ}=T_c^T\cdot K^m_{xyz}\cdot T_c, \tag{3.32}$$

cunoscînd marticele $T_{\delta a}$ și T_c, matricea de transformare $[a_2^m]$ va rezulta astfel :

$$[a_2^m]=T_{\delta a}\cdot T_c. \tag{3·33}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă elementele finite ale substructurii sînt definite astfel că vectorul de deformație generalizat $\{\alpha\}$ coincide cu vectorul deplasărilor nodurilor într-un sistem local caratezian xyz, rezultă că $T_{\delta\alpha}=I$, unde I este matricea unitară de ordin $q\times q$, iar

$$[a_2^m]=T_c. \tag{3.34}$$

În concluzie, matricea de rigiditate a substructurii m, în sistemul de referință global, va avea expresia :

$$K^m=[a_1^m]^T\cdot[a_2^m]^T\cdot[k^m]\cdot[a_2^m]\cdot[a_1^m]. \tag{3.35}$$

Este foarte important de notat faptul că transformările operate de matricile $[a_1]$ și $[a_2]$ sînt suficiente numai dacă în formularea substructurii, adică a tipului de element finit din componența sa, deplasarea de corp rigid este extrasă, adică matricea de transformare $T_{\varepsilon\alpha}$ anulează vectorul $\{\varepsilon\}$ pentru o deplasare de rototranslație. În caz contrar (elemente finite incompatibile), trebuie operată extragerea deplasării de corp rigid a substructurii, respectiv a introducerii unei noi matrici de transformare $[a_3]$, [12].

Rezumînd cele expuse, procedeul de calcul prin divizare în substructuri, în forma sa de bază, cuprinde următoarele etape :

1. Definirea numărului de substructuri, a interfețelor, a topologiei structurii (notarea nodurilor structurii și substructurilor) și determinarea matricelor de transformare $[a_1^m]$ și $[T_c^m]$.

2. Determinarea pentru fiecare substructură, în raport cu sistemul de referință local, a matricelor de rigiditate K_{NN}, $K_{N,I}$, $K_{I.I}$.

3. Determinarea pentru fiecare substructură a reacțiunilor în nodurile de contact blocate, la fiecare interfață, $\{\bar{R}^{m,k}\}$ și a încărcărilor adiționale $\{L_A\}$.

4. Determinarea pentru fiecare substructură a matricelor de rigiditate și a vectorilor de încărcare față de sistemul de referință global :

$$[K_{N,N}^m]_{XYZ}=T_c^T\cdot[K_{N,N}^m]_{xyz}\cdot T_c$$

$$\{L_N^m\}_{XYZ}=T_c\cdot\{L_N^m\}_{xyz}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Determinarea matricelor „condensate" și a vectorilor condensați:

$$\tilde{K}^m_{I,I} = K^m_{I.I} + K^m_{N,I} \cdot G^m_{N,I}$$

$$\{L^m_{I,N}\} = \{L^m_I\} + G^m_{N,I}\{L^m_N\}.$$

6. Determinarea prin asamblare a matricei de rigiditate condensată a structurii și a vectorului de încărcare echivalent:

$$K^c_{I,I} = \sum_1^n U^m_I \tilde{K}^m_{I,I} [U^m_I]^T$$

$$\{L^c_I\} = \sum_1^n U^m_I \{L^m_{I,N}\} + \{L_{I,A}\}.$$

7. Rezolvarea sistemului de ecuații:

$$K^c_{I,I}\{r\} = L^c_I.$$

8. Determinarea deplasărilor nodurilor în cuprinsul fiecărei substructurii:

$$\{\delta^m_I\} = [a^m_1] \cdot \{r\}$$

$$\{\delta^m_N\} = [K^m_{N,N}]^{-1} \cdot \{L^m_N\} + K^m_{N,I} \cdot \{\delta^m_I\}.$$

9. Determinarea eforturilor unitare în cuprinsul fiecărei substructuri:

$$\{\sigma^m\} = D^m \cdot B^m \{\delta^m_I \mid \delta^m_N\}.$$

Este ușor de constatat o similitudine a procedeului de calcul prin divizarea în substructuri cu metoda de calcul a deformațiilor pentru cadre. Astfel, momentele de încastrare perfectă la capetele barelor corespund reacțiunilor $\{\bar{R}^m\}$, iar momentul neechilibrat la nod, vectorului $\{L_A\}$. Deblocarea nodului și impunerea condițiilor de continuitate a rotirilor nodurilor corespunde asamblării substructurilor, iar procedeul de condensare a substructuri-

Scanned with OKEN Scanner

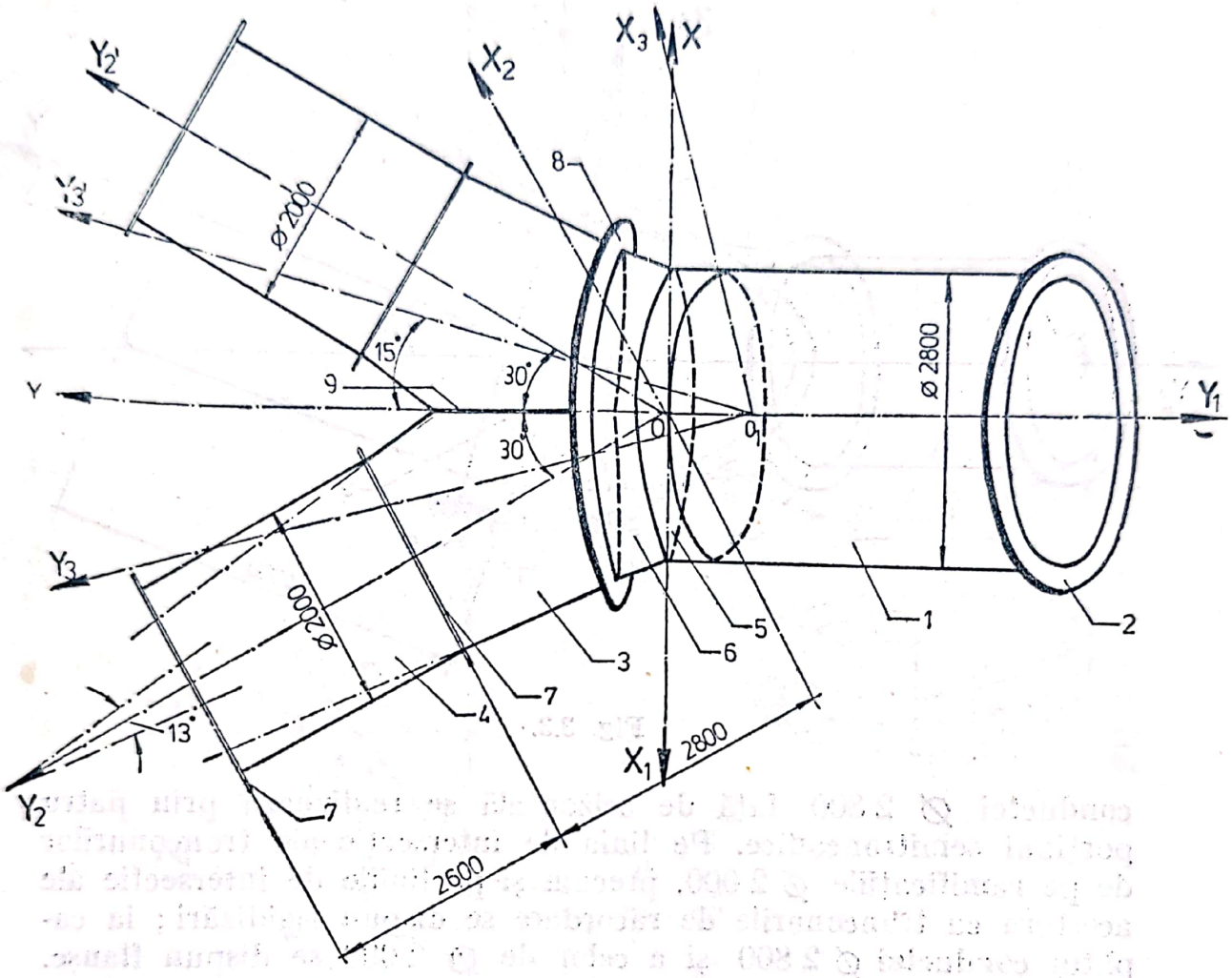


Fig. 3.2.

lor relativ la nodurile de contact (interfață) corespunde faptului că rigiditatea barelor se definește în raport numai cu deplasările capetelor de bară, nu și a secțiunilor interioare.

În continuare se va da ca exemplu o ramificație de conductă metalică, pentru ilustrarea modului de împărțire în substructuri, determinarea interfețelor și modul de notare.

O ramificație de conductă ∅ 2 800 mm în două conducte de ∅ 2 000, având și un unghi de deviere în planul vertical de 20° este arătată în figura 3.2 și figura 3.3. Racordarea părții cilindrice a conductei ∅ 2 800 mm cu cele două ramificații ∅ 2 000, dispuse la un unghi de 30° în planul orizontal se efectuează cu două porțiuni tronconice având unghiurile de conicitate 13°. Frîngerea axului

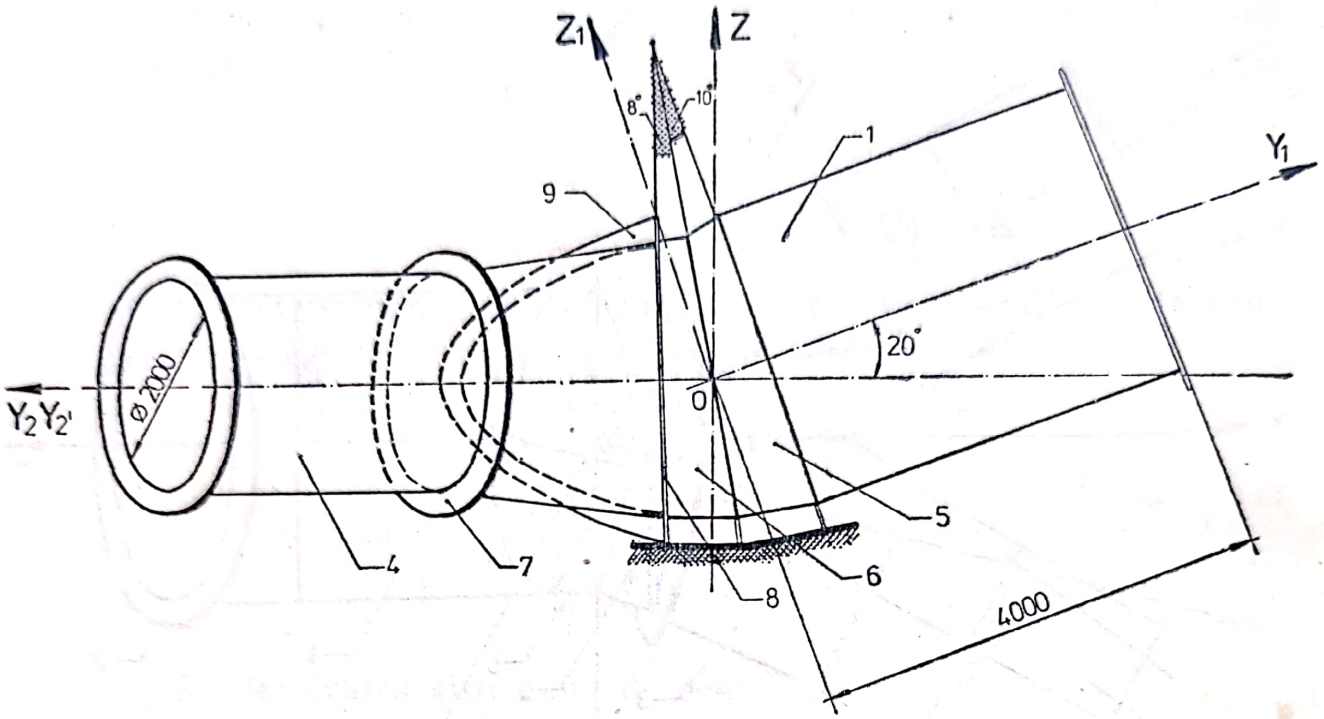


Fig. 3.3.

conductei ∅ 2 800 față de orizontală se realizează prin patru porțiuni semitronconice. Pe linia de intersecție ale tronconurilor de pe ramificațiile ∅ 2 000, precum și pe liniile de intersecție ale acestora cu tronconurile de racordare se dispun rigidizări ; la capătul conductei ∅ 2 800 și a celor de ∅ 2 000 se dispun flanșe. Întreaga ramificație reazemă în zona centrală, unde sînt tronconurile de racordare. Pentru porțiunile cilindrice se vor adopta elemente finite de placă curbă subțire cilindrică dreptunghiulare, iar pentru porțiunile conice se vor adopta elemente finite de placă subțire triunghiulare. Pentru rigidizări și flanșe, care sînt substructuri plane, se vor adopta elemente finite plane, completate însă cu rigidități nule pe direcția normală la planul lor (vezi paragraful 3.3). În tabelul 3.1 se dau caracteristicile substructurilor în vederea asamblării. Nodurile de contact sînt situate pe cele 11 linii de intersecție (*a*), (*b*), (*c*), . . ., (*k*). În figura 3.4 este indicată ordinea de notare a nodurilor. Elementele finite ale substructurilor se vor nota respectînd același sens cu cel al nodurilor de contact ; de exemplu, elementele substructurii 2 se vor nota în ordinea indicată de spirala din figura 3.4.

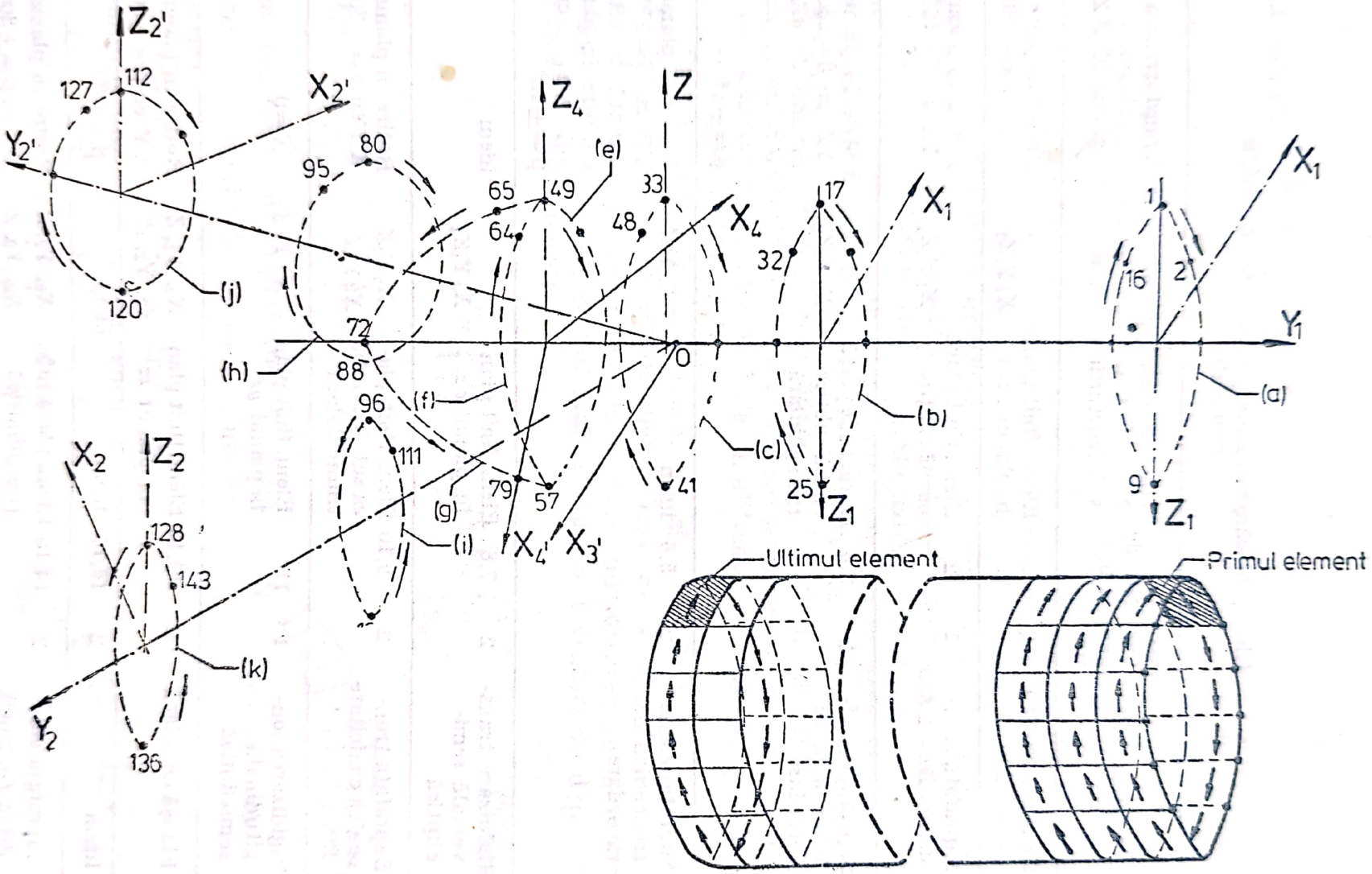


Fig. 3.4.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.1

Elemente caracteristice pentru substructurile componente

Nr. tip	Substructura	Nr. buc. identice	Nr. de ordine	Tipul elementului finit al substructurii	Sistem local de coordonate	Transformarea în sistemul global $X\ Y\ Z$
1.	Flanșă circulară Dn=2 200	1	1	Elem. finit plan în planul xz	$X_1 Y_1 Z_1$	Rotire în planul YZ cu θ=160°
2.	Suprafață cilindrică, Dn=2 800	1	2	Elem. finit placă curbă subțire cilindrică	$X_1 Y_1 Z_1$	Rotire în planul YZ cu θ=160°
3.	Suprafața semitronconică de racordare	2	3,4	Elem. finit placă curbă subțire triunghiulară	$X_3 Y_3 Z_3$	Rotire în planul YZ cu θ=160° urmată de cîte o rotire în planul XY_1 cu $\beta=\pm 8°$
4.	Suprafața semitronconică de racordare	2	5,6	idem	$X_4 Y_4 Z_4$	Rotire în planul YZ cu θ=170° urmată de cîte o rotire în planul XY_1 cu $\beta=\pm 15°$
5.	Rigidizare transversală semieliptică	2	7,8	Elem. finit plan în planul $x\ z$	$X_4 Y_4 Z_4$	idem
6.	Suprafața tronconică conicitate 13°	2	9,10	Elem. finit placa subțire curbă triunghiulară	$X_2 Y_2 Z$ $X_2' Y_2' Z$	Rotire în planul XY cu $\beta=\pm 30°$
7.	Rigidizarea longitudinală semieliptică	1	11	Elem. finit plan în planul yz	$X,\ Y,\ Z$	X=0
8.	Flanșă circulară	2	12,13	Elem. finit plan în planul xz	$X_2,\ Y_2, Z$ $X_2',\ Y_2', Z$	Rotire în planul XY cu $\beta=\pm 30$
	Idem	2	16,17	idem	idem	$\beta=\pm 30°$
9.	Suprafața cilindrică Dn 2 000	2	14,15	Elem. placă subțire cilindrică	$X_2,\ Y_2, Z$ $X_2',\ Y_2', Z$	Rotire în planul XY cu $\beta=\pm 30°$

Scanned with OKEN Scanner

3.3. STRUCTURI ALCĂTUITE DIN SUBSTRUCTURI PLANE

Un caz mai particular este oferit de structurile asamblate din substructuri plane, cum sînt structurile cu diafragme pentru clădiri, nuclee de beton armat glisate pentru clădiri înalte, acoperișuri cutate sau de forme poliedrice, suprastructuri de poduri cu secțiune chesonată etc. De asemenea, elementele finite și substructurile plane se utilizează cu succes la modelarea, pentru schema de calcul, a unor structuri avînd suprafețe curbe, evitînd utilizarea elementelor finite de tip curb, care necesită o formulare mai complexă. Este foarte important ca în acest caz numărul de elemente finite plane să fie suficient de mare (după direcția curburii principale), pentru buna aproximare geometrică și implicit pentru asigurarea unei convergențe satisfăcătoare ; de asemenea și încărcările exterioare trebuie modificate, introducînd încărcări numai la noduri (fig. 3.5).

Se consideră, în continuare, un element finit plan, solicitat atît în planul său (stare de membrană), cît și normal pe planul său (stare de încovoiere). Luînd separat comportarea de membrană de cea de încovoiere, se vor stabili următorii vectori de deplasare, respectiv de solicitare :

$$\{\delta_i\}^P=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}; \qquad \{\delta\}^b=\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{3.36a, b}$$

$$\{F_i\}^P=\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}; \qquad \{F_i\}^b=\begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix},$$

iar matricele de rigiditate *de membrană*, respectiv *de încovoiere* sînt $[k^P]$ și $[k^b]$.

Pentru a obține matricea de rigiditate integrală a elementului finit trebuie avute în vedere următoarele considerente : în primul rînd deplasările de „membrană" nu trebuie să afecteze

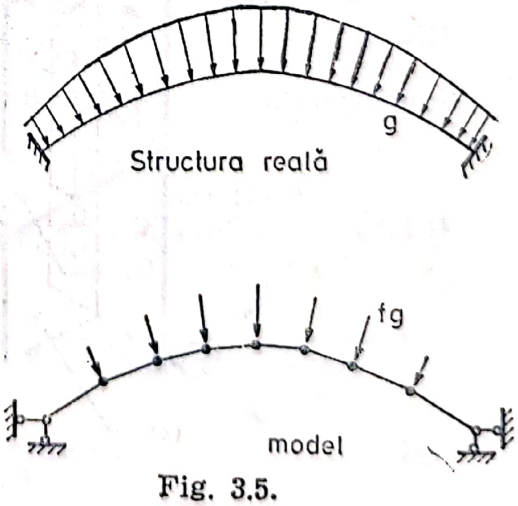


Fig. 3.5.

Scanned with OKEN Scanner

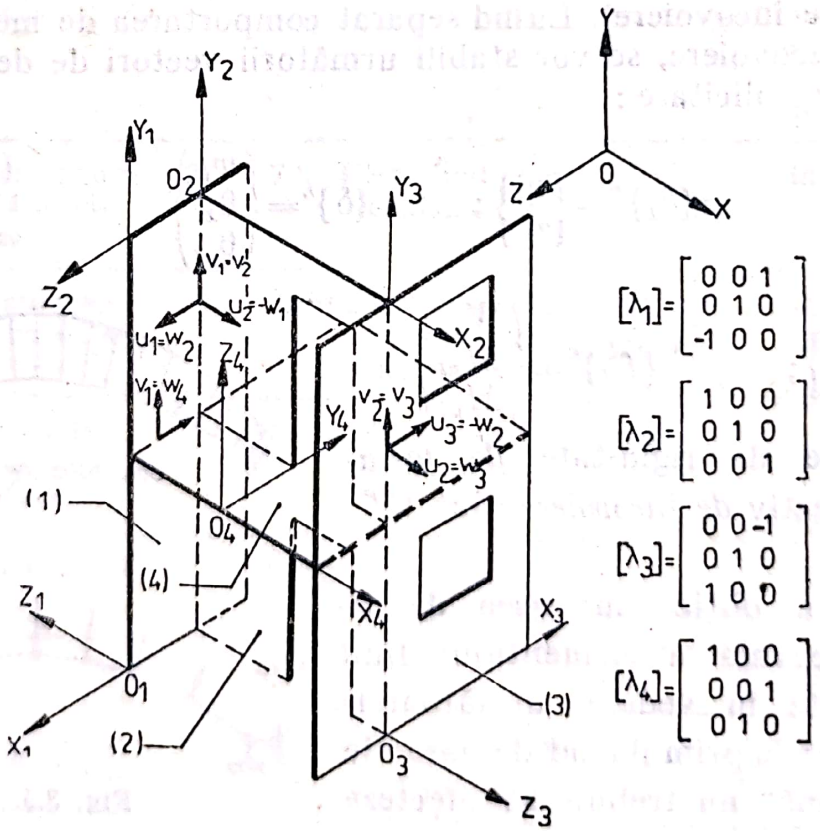
deformațiile de încovoiere și reciproc ; în al doilea rînd, rotația θ_z nu trebuie să constituie un parametru pentru nici una din stări. Pentru simplificarea asamblării elementelor finite se va păstra în continuare deplasarea θ_z, dar atribuind o rigiditate nulă. În acest fel, matricea de rigiditate a elementului finit va fi de forma :

$$[k_{rs}] = \left[\begin{array}{cc:ccc:c} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & [k^p_{rs}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & [k^b_{rs}] & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.37}$$

respectiv vectorii deplasărilor și solicitărilor devin

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F^p \\ F^b \\ 0 \end{Bmatrix} = [k_{rs}] \begin{Bmatrix} \delta^p \\ \delta^b \\ \theta_z \end{Bmatrix}. \tag{3.38}$$

Un caz mai particular îl constituie structurile plane care nu reprezintă rigiditate în direcția perpendiculară pe planul lor, spre exemplu, diafragmele clădirilor (fig. 3.6). Deoarece substructurile



$$[\lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\lambda_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\lambda_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 3.6.

Scanned with OKEN Scanner

se asamblează în spațiu, nodurile vor avea trei grade de libertate. În acest caz, submatricea de rigiditate a elementului finit plan va fi:

$$[k_{rs}]=\left[\begin{array}{ccc|c} & [k^p_{rs}] & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}\\\\\end{matrix} \\ x & y & z & \end{array}\right]\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}. \tag{3.39}$$

În cazul substructurilor cu elemete finite plane, determinarea cosinusurilor directoare față de sistemul global de referință se va efectua după următorul procedeu:

Planul elementului finit, sau al substructurii, fiind definit prin trei puncte (noduri) i, j, m în sistemul de referință global XYZ are ecuația

$$AX+BY+CZ=0, \tag{3.40}$$

pentru care A, B, C sînt dați de relațiile

$$\begin{aligned} A&=Y_{ji}Z_{mi}-Y_{mi}Z_{ji} \\ B&=-X_{ji}Z_{mi}+X_{mi}Z_{ji}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

unde:

$$X_{ji}=X_j-X_i \text{ ș.a.m.d.}$$

Cosinusurile directoare ale normalei la planul respectiv sînt:

$$\lambda_{zX}=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}};\quad \lambda_{zY}=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}};\quad \lambda_{zZ}=\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}. \tag{3.42}$$

Dacă axa ox se alege paralelă cu planul XOY, cosinușii directori ai axelor ox, respectiv oy vor fi:

$$\lambda_{xX}=-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad \lambda_{xY}=-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad \lambda_{xZ}=0; \tag{3.43}$$

$$\lambda_{yX}=\frac{AC}{\sqrt{(A^2+B^2)\cdot(A^2+B^2+C^2)}};\quad \lambda_{yY}=\frac{BC}{\sqrt{(A^2+B^2)\cdot(A^2+B^2+C^2)}};$$

$$\lambda_{yZ}=\frac{A^2+B^2}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}. \tag{3.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

Utilizarea substructurilor plane își găsește un cîmp larg de aplicare la studiul și calculul de rezistență al structurilor de acoperire de tipul suprafețelor poliedrate.

Acest tip de structuri discontinue constau în înscrierea unei suprafețe curbe continue cu un poliedru, în mod similar ca în cazul structurilor reticulate tridimensionale ; spre deosebire însă de acestea, elementele de rezistență nu sînt barele corespunzătoare muchiilor, ci elemente prefabricate plane corespunzătoare fețelor poliedrului.

Realizarea elementelor prefabricate plane pentru fețe printr-o stereotomie optimă, vizînd un număr cît mai mic de tipuri, cu dimensiuni convenabile pentru montaj, asigură avantaje tehnologice de execuție mari în comparație cu suprafețele subțiri din beton armat monolit. Față de structurile reticulare, suprafețele poliedrate prezintă avantajul unui consum mai redus de metal și o execuție mai rapidă.

Comportarea statică a acestor structuri este esențial diferită de cea a suprafețelor subțiri, cît și de cea a structurilor reticulare, astfel că un calcul bazat pe un model de suprafețe subțiri sau reticulată este impropriu și riscant.

Structurile cu suprafețele poliedrate se clasifică în două categorii :

a) Structuri cu suprafețe cutate (fig. 3.7.), obținute prin cutarea planului sau a unei suprafețe desfășurabile (cilindru, con, suprafața dublu riglată) sau a unor suprafețe de rotație nedesfășurabile.

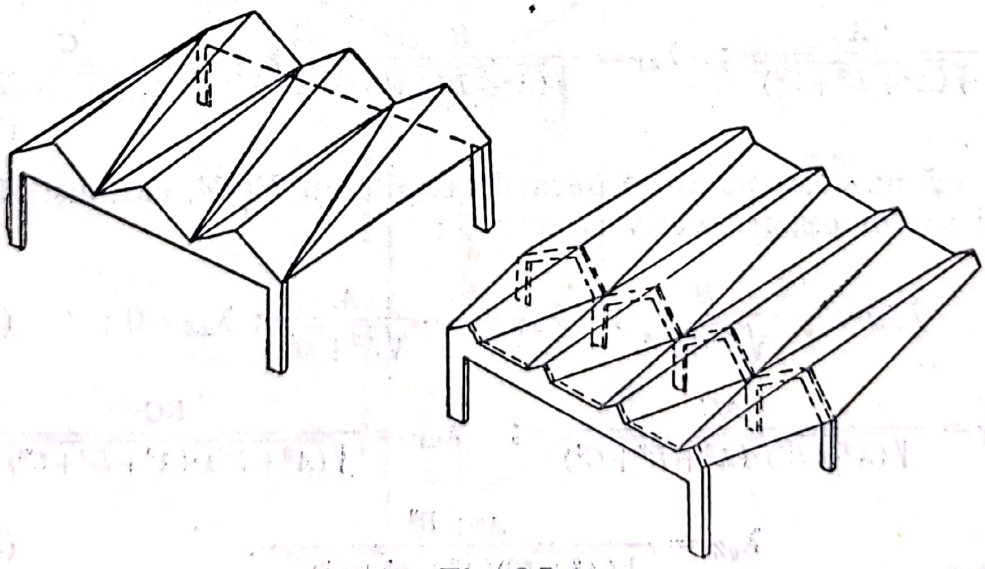


Fig. 3.7.

Scanned with OKEN Scanner

b) Structuri cu suprafețe fațetate (fig. 3.8), obținute prin echipartiția aproximativă a unei suprafețe curbe. Pentru a atinge maximum de avantaje în realizarea curburilor suprafeței, precum și în prefabricare și montaj este indicată utilizarea suprafețelor de translație sau riglate, în care caz se poate beneficia și de precomprimare în lungul generatoarelor.

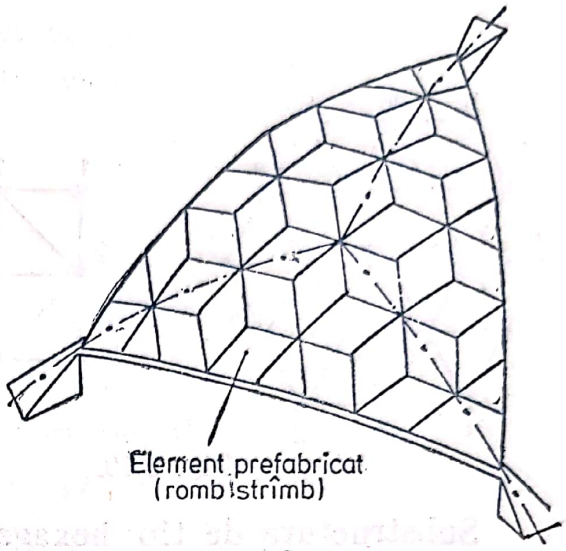


Fig. 3.8.

Pentru ilustrarea utilizării structurilor compuse din substructuri plane se prezintă ca exemplu o structură spațială de tipul unui poliedru semiregulat, un „icosdodecaedru trunchiat", avînd fețele corespunzătoare decagoanelor, libere, conform figurii 3.9. Structura este

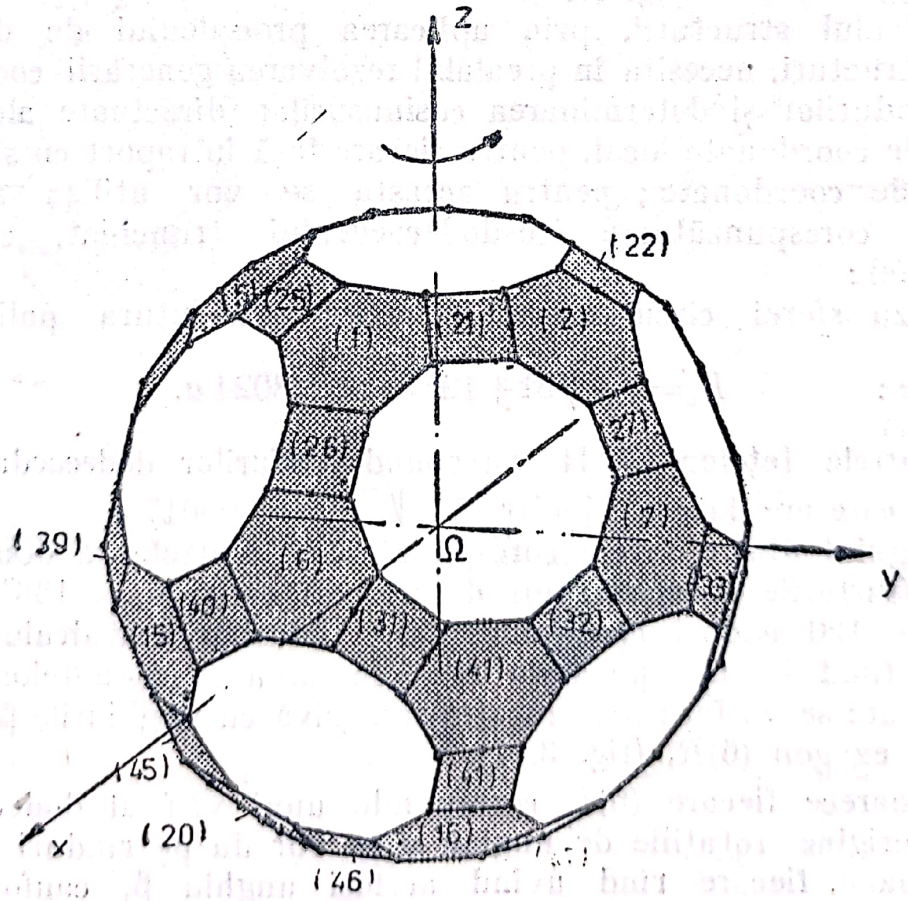


Fig. 3.9.

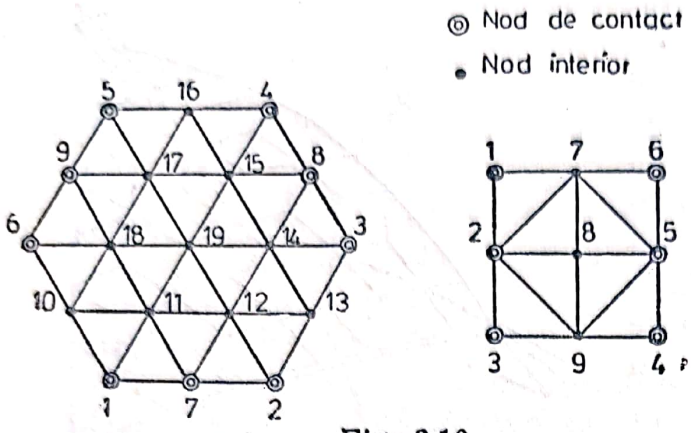


Fig. 3.10.

alcătuită din 50 de substructuri plane corespunzătoare celor 20 hexagoane (6) R și celor 30 patrate, (4)R. Totalitatea nodurilor structurii asamblate, deci a nodurilor de „contact", rezultă ca suma vîrfurilor poliedrului și a nodurilor situate pe mijlocul muchiilor de intersecție între un (6)R și un (4)R, adică : $N=V+M-12\times10=$ $=120+180-120=180$ noduri. Substructura de tip hexagon (6)R are 9 noduri de contact și 10 noduri interioare, avînd deci matricea $K^{(6)}_{N,N}$ de ordin 10×3 și $K^{(6)}_{I,N}$ de ordin 9×3 ; substructura de tip partat (4)R are 6 noduri de contact și 3 noduri interioare, deci ordinul lui $K^{(4)}_{N,N}$ este 3×3, iar a lui $K^{(4)}_{I,I}$ este 6×3 (fig. 3.10).

Calculul structurii, prin aplicarea procedeului de divizare în substructuri, necesită în prealabil rezolvarea generării coordonatelor nodurilor și determinarea cosinusurilor directoate ale sistemului de coordonate local, pentru fiecare față în raport cu sistemul global de coordonate ; pentru aceasta se vor utiliza relațiile metrice corespunzătoare icosdodecaedrului trunchiat, conform [6], astfel :

Raza sferei circumscrise în raport cu latura poliedrului „a" este : $$R_c=\frac{1}{2}\sqrt{31+12\sqrt{5}}\cdot a=3{,}8024\ a.$$

Centrele fețelor (6) R corespund vîrfurilor dodecaedrului de origine, care are latura $l_{12}=[10/(1+\sqrt{5})]\ a=3{,}09017\ a$.

Unghiul dintre razele corespunzătoare centrelor a două exagoane (vîrfurile dodecaedrului de origine) este : $\alpha_{6,6}=138°11'23''$.

Cele 120 noduri corespunzătoare vîrfurilor poliedrului semiregulat fiind înscrise pe sfera R_c, generarea coordonatelor corespunzătoare se va face prin rotația succesivă cu unghiurile β și γ a fiecărui exagon (6)R, (fig. 3.11).

Deoarece fiecare (6)R corespunde unui vîrf al dodecaedrului de origine, rotațiile de unghiu γ se vor da pe rînduri de cîte 5 exagoane, fiecare rînd avînd același unghiu β, conform tabelului 3.2.

Scanned with OKEN Scanner

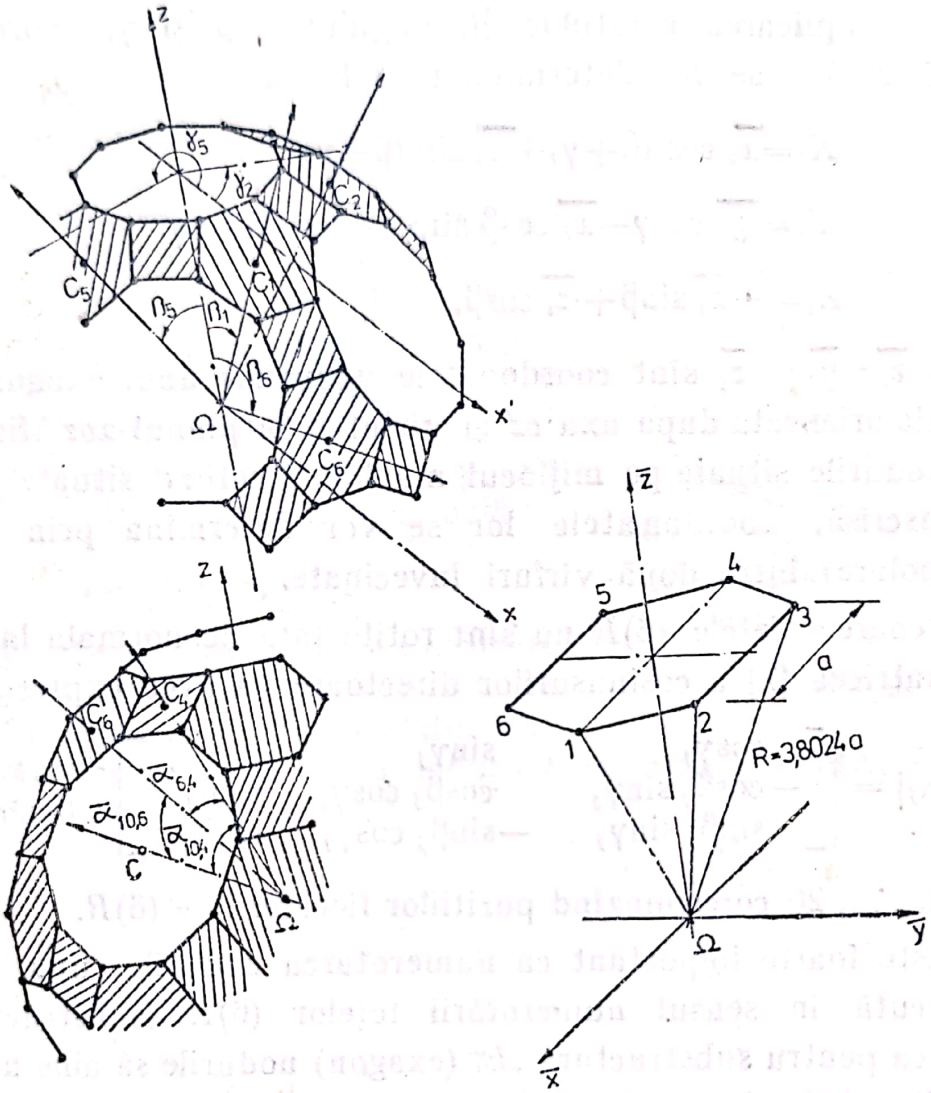


Fig. 3.11.

Tabelul 3.2

Unghiurile pentru fațetele (6)R

Nr. de ordine al fațetei	β	γ	Nr. de ordine al fațetei	β	γ
1		0°	11		36°
2		72°	12		108°
3	37°24′34″	144°	13	100°48′39″	180°
4		216°	14		252°
5		288°	15		324°
6		0°	16		36°
7		72°	17		108°
8	79°11′′10″	144°	18	142°37′26″	180°
9		216°	19		252°
10		288°	20		324°

Scanned with OKEN Scanner

Prin aplicarea rotaţiilor cu unghiurile β şi γ, coordonatele vîrfurilor $(6)R$ se vor determina cu relaţiile

$$X_i = \overline{x_i} \cos(\beta+\gamma) + \overline{z_i} \sin(\beta+\gamma)$$

$$Y_i = \overline{y_i} \cos\gamma - \overline{x_i} \cos\beta \sin\gamma - \overline{z_i} \sin\beta \sin\gamma$$

$$Z_i = -\overline{x_i} \sin\beta + \overline{z_i} \cos\beta,$$

unde : $\overline{x_i}$; $\overline{y_i}$; $\overline{z_i}$ sînt coordonatele vîrfurilor unui exagon avînd normala orientată după axa *oz* şi vîrful 1 în planul *xoz* (fig. 3.11).

Nodurile situate pe mijlocul muchiilor nefiind situate pe sfera circumscrisă, coordonatele lor se vor determina prin mediere (interpolare) între două vîrfuri învecinate.

Deoarece feţele $(6)R$ nu sînt rotite faţă de normala la planul lor, matricea $[\lambda]$ a cosinusurilor directoare va avea expresia :

$$[\lambda_j] = \begin{bmatrix} \cos\gamma_j & \sin\gamma_j & 0 \\ -\cos\beta_j \sin\gamma_j & \cos\beta_j \cos\gamma_j & \sin\beta_j \\ \sin\beta_j \sin\gamma_j & -\sin\beta_j \cos\gamma_j & \cos\beta_j \end{bmatrix},$$

$j=1,2, \ldots, 20$ corespunzînd poziţiilor fiecărei feţe $(6)R$.

Este foarte important ca numerotarea nodurilor unui $(6)R$ să fie făcută în sensul numerotării feţelor $(6)R$ (substructurilor), astfel ca pentru substructura „k“ (exagon) nodurile să aibe numerele de ordine $12k+1$ la $12k+12$; numerotarea patratelor $(4)R$ urmează după epuizarea tuturor $(6)R$.

Pentru substructurile faţetelor de tip pătrat $(4)R$, cosinusurile directoare ale normalei se determină cu relaţiile (3.24), cunoscînd coordonatele vîrfurilor. Faţetele de pe rîndul 1, 2, 4 şi 5 au axa locală *ox* în plan orizontal ; faţetele $(4)R$ din rîndul 3 sînt rotite alternativ cu $\pm 30°$ în jurul normalei, motiv pentru care matricea cosinusurilor directoare respectivă $[\lambda]$ se va preînmulţi cu matricea de rotaţie :

$$T' = \begin{bmatrix} \cos 30° & \pm\sin 30° & 0 \\ \pm\sin 30° & \cos 30° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

Notarea nodurilor de contact, în sistemul global al structurii asamblate, se efectuează în sens trigonometric, urmînd modul de numerotare al substructurilor, conform figurii 3.12.

În acest fel, pentru fiecare față exagonală $(6)R$ există o relație de recurență între numărul de ordine al unui nod de contact în numerotarea locală și cea globală. Astfel, dacă fața $(6)R$ are numărul de ordine „m", atunci nodul „i" în sistemul local va corespunde nodului „I" din numerotarea globală:

$$I=i+9\cdot(m-1).$$

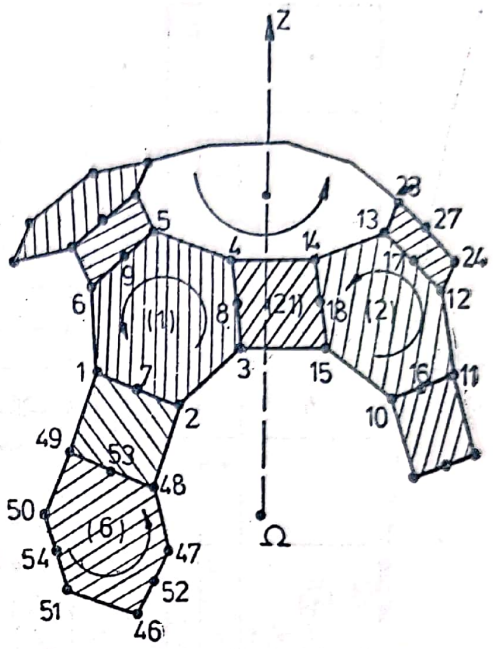


Fig. 3.12.

De asemenea și pentru fețetele pătrate $(4)R$ se pot stabili astfel de relații de recurență. Pentru fețetele $(4)R$ din rîndul 1, vectorul de incidență a nodurilor de contact pentru fețetele cu numărul de ordine „k" va fi:

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \varepsilon\\ \eta\end{Bmatrix}_{\text{global}} = \begin{Bmatrix}4\\ 8\\ 3\\ 15\\ 18\\ 14\end{Bmatrix} +9\times(k-21); \qquad \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \varepsilon\\ \eta\end{Bmatrix}_{\text{local}} = \begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\end{Bmatrix}.$$

Prin asamblarea substructurilor corespunzătoare fețetelor $(6)R$ și $(4)R$ conform relațiilor (3.19), (3.21), (3.29), (3.32), matricea de rigiditate a structurii poliedrice asamblate devine:

$$K^c_{I,I}=\sum_{i=1}^{20}[a_1]_i^T\cdot T_i^T\cdot K^{(6)}_{I,I}\cdot T_i\cdot[a_1]_i+\sum_{j=1}^{30}[a_1]_j^T\cdot T_j^T\cdot K^{(4)}_{I,I}T_j\cdot[a_1]_j.$$

3.4. STRUCTURI MONOTONE

În numeroase cazuri o structură este alcătuită din substructuri identic conformate (cazul diafragmelor cu goluri monotone), sau conține porțiuni cu repetabilitate. În aceste cazuri procedeul

Scanned with OKEN Scanner

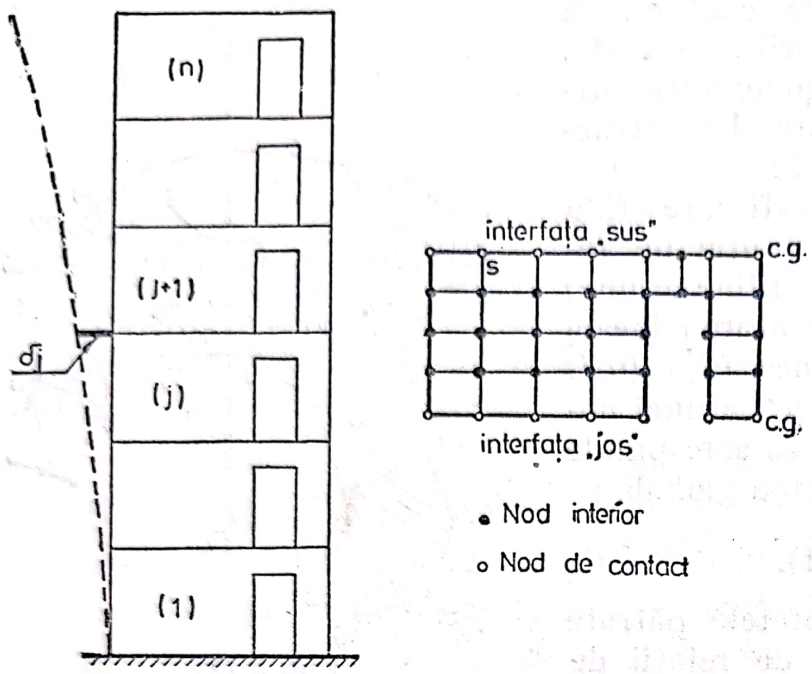


Fig. 3.13.

general expus prezintă unele simplificări, datorită faptului că determinarea mărimilor caracteristice „condensate" se face pentru una sau cel mult două substructuri. Considerînd o structură de tip consolă, spre exemplu, o diafragmă cu goluri, o substructură curentă va corespunde înălțimii unui nivel (fig. 3.13). Pentru substructurile corespunzătoare nivelurilor 2 pînă la n, matricele de rigiditate sînt identice :

$$K^2_{N,N}=K^3_{N.N}=\ldots=K^n_{N,N}=K_{N,N}\,;\quad K^2_{I,N}=\ldots=K^n_{I,N}=K_{I,N}$$
$$K^2_{I,I}=K^3_{I,I}=\quad=K^n_{I,I}=K_{I,I}. \tag{3.45}$$

Pentru substructura nivelului I, matricele de rigiditate sînt diferite datorită restricțiilor impuse nodurilor de la interfața de rezemare. Dacă numărul nodurilor de pe o linie de intersecție este N_i, ordinul matricei condensate $K_{I,I}$ este $2N_i \times q$. Fiecare substructură de la nivelul 2 la n are două interfețe adiacente, astfel că matricea condensată $K_{I,I}$ poate fi partiționată în raport cu deplasările nodurilor de la interfața de „jos", respectiv de la interfața de „sus" astfel :

$$\tilde{K}_{I,I}=K_{I,I}+K_{I,N}\cdot G_{N,I}=\left[\begin{array}{c|c}\tilde{K}^{j,j}_{I,I} & \tilde{K}^{j,s}_{I,I}\\ \hline \tilde{K}^{s,j}_{I,I} & \tilde{K}^{s,s}_{I,I}\end{array}\right]\begin{array}{l}\text{interfața „jos"}\\ \\ \text{interfața „sus"}\end{array} \tag{3.46}$$

Pentru asamblarea substructurilor în structura generală, matricele $K_{I,I}$, formulate conform (3.46), se înmulțesc conform relației (3.19) cu matricele de transformare $U_1=[a_1]^T$. Matricea de trans-

formare $[a_1^m]$ este dreptunghiulară cu $2N_i$ linii și nN_i coloane, avînd coeficienții 1 în partițiile $m-1$ „jos" și m „sus", astfel :

$$a_1^m = \begin{array}{c} \text{jos} \\ \\ \text{sus} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c|c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (3.47)$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots & m-1 & m & \ldots\ldots\ldots\ n \end{array}$$

Aplicînd relația (3.19) și ținînd cont de (3.46) și (3.47), se obține matricea de rigiditate a structurii $K_{I,I}^c$ sub forma :

$$K_{I,I}^c = \begin{bmatrix} K_1 & C & & & & \\ C^T & K & C & & & \\ & C^T & K & C & & \\ & & & C^T & K & \end{bmatrix}, \qquad (3.48)$$

$(nN_i \times nN_i)$

unde matricele K_1, K, C de ordin $N_i \times N_i$, au expresiile :

$$K_1 = K_{I,I}^{j,j}\,; \quad K = K_{I,I}^{j,j} + K_{I,I}^{s,s}\,; \quad C = K_{I,I}^{s,j}. \qquad (3.49)$$

În ipoteza că încărcările exterioare acționează numai în nodurile de la înterfețe (în dreptul planșeelor), vectorii de încărcare $\{L_N\}$ și $\{L_A\}$ se anulează, rezultînd pentru vectorul de încărcare a structurii relația :

$$\{L_c\} = \{L_I\}. \qquad (3.50)$$

Forma particulară tri-diagonală a matricei $K_{I,I}^c$ permite o rezolvare mai simplă a sistemului de ecuații (3.18), utilizînd următorul algoritm :

a) Se determină matricele K_m și vectorii L_m succesiv :

$$\{\delta_1\} = K_1^{-1}\{L_1\} - K_1^{-1} \cdot C\ \{\delta_2\}$$

$$K_2^* = K - C^T K_1^{-1} C; \quad \{L_2^*\} = \{L_2\} - C^T \cdot K_1^{-1}\{L_1\} \qquad (3.51)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\{\delta_m\} = [K_m^*] \cdot \{L_m^*\} - [K_m^*]^{-1} C \{\delta_{m+1}\};$$

$$\{L_m^*\} = \{L_A\} - C^T\ [K_{m-1}^*]^{-1} \cdot \{L_{m-1}\}$$

$$K_n^* = K - C^T\ [K_{n-1}^*]^{-1} C.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Se rezolvă sistemul de $N_i \times q$ ecuații :

$$K_n^* \{\delta_n\} = \{L_n^*\}. \tag{3.52}$$

c) Cu valorile deplasărilor ultimului nivel $\{\delta_n\}$ determinate, se găsesc succesiv valorile lui $\{\delta_{n-1}\}, \ldots, \{\delta_1\}$. Determinarea în continuare a eforturilor unitare în fiecare substructură se conduce conform celor expuse în procedeul general din paragraful 3.2.

Pentru a ține cont de prezența planșeelor ca șaibe rigide în planul lor, se vor impune restricții suplimentare nodurilor de pe interfețe, în sensul menținerii constante a distanțelor între noduri. Pentru aceasta, în matricele $K_{I,I}^{s,s}$ și $K_{I,I}^{j,j}$ termenii corespunzători deplasărilor în direcția k a două noduri învecinate i și l vor deveni de valori infinite ; practic, li se vor atribui o valoare foarte mare :

$$(k_{i,l}^{x,x})^{s,s} = (k_{i,l}^{x,x})^{j,j} = 10^{15}. \tag{3.53}$$

Ipoteza unor planșee cu rigiditate mare atît în planul lor cît și în direcție normală (rigide la încovoiere) impune restricții suplimentare față de valorile (3.53). În cazul cînd, în plus, se neglijează deplasările în direcția $y-y$, totalitatea restricțiilor impuse conduc la menținerea, ca mărimi operante, numai a matricelor $K_{I,I}^{s,j}$ și $K_{I,I}^{j,s}$, deoarece :

$$K_{I,I}^{s,s} \to \infty \text{ și } K_{I,I}^{j,j} \to \infty. \tag{3.54}$$

Această ipoteză corespunde procedeului de calcul a *rigidităților de nivel*, frevcent aplicată în practica inginerească. Conform acestui procedeu de calcul, se blochează nodurile interfeței „jos" și se aplică o forță unitară, orizontală la interfața „sus„ ; deplasarea interfeței „sus" în raport cu cea „jos" determinată prin calcul pe o structură redusă la un nivel (o substuctură curentă) este δ_0. Matricea de rigiditate a structurii asamblate (diafragma) se va determina prin inversarea matricei de flexibilitate, care în acest procedeu se deduce relativ simplu :

$$K_p = D_p^{-1} = \frac{1}{\delta_0} \cdot \begin{bmatrix} I, I \ldots\ldots\ldots\ldots, I \\ I, 2I, \ldots\ldots\ldots, 2I \\ \cdot \\ \cdot \\ I, 2I, 3I, \ldots\ldots\ldots, nI \end{bmatrix}^{-1}, \tag{3.55}$$

$(nN_i \times nN_i)$

unde I este matricea unitate de ordin $N_i \times N_i$.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind matricea de rigiditate $K^c_{I,I}$ corespunzătoare rezolvării exacte cu matricea K_p corespunzătoare metodei aproximative a rigidităților de nivel, eroarea indusă în valorile deplasărilor $\{\Delta r\}$, rezultă

$$\{\Delta r\} = -[K^c_{I,I}]^{-1} \cdot \Delta K \cdot \{r\}. \qquad (3.56a, b)$$

unde : $\Delta K = K^c_{I,I} - K_p$.

Pentru a putea opera cu mărimi scalare, în relația (3.56) matricea și vectorii se vor înlocui cu *normele* respective. Notăm că pentru o matrice A, norma sa se exprimă prin :

$$\|A\| = max \|A \cdot x\|_{\|x\|=1} \qquad (3.57)$$

Gradul de aproximare al metodei rigidităților de nivel se va exprima prin valoarea coeficientului β sub forma [14] :

$$\beta = \frac{\|\Delta r\|}{\|r\|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \cdot \frac{\|\Delta K\|}{\|K\|}, \qquad (3.58)$$

expresie obținută în baza relației

$$\|K\| \cdot \|K^{-1}\| = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}, \qquad (3.59)$$

unde λ_1, λ_n sînt valorile proprii maxime, respectiv minime. Pentru structurile elastice valorile $\lambda_1, \ldots . \lambda_n$ sînt reale și pozitive. Din relația (3.58) se deduce concluzia calitativă că pentru structuri de tipul diafragmelor, eroarea determinată prin mărimea lui β este mai mare decît pentru structurile de tipul cadrelor la care ecartul între λ_1 și λ_n este mai redus. În concluzie, pentru structurile cu diafragme nu este recomandabilă aplicarea altor ipoteze și restricții decît cele specificate la (3.53).

În afară de structurile montate de tip consolă, o altă categorie de structuri monotone sînt cele alcătuite din substructuri identice dispuse cu o simetrie față de un punct central (fig. 3 14), Substructurile sînt identice, nefiind necesară simetria lor proprie ; de asemenea, nu este necesară o simetrie axială a încărcării exterioare. Pentru a putea utiliza eficient avantajele monotoniei structurii, este foarte important modul de numerotare al substructurilor. Numerotarea optimă, care conduce la o lățime de bandă minimă este indicată în figura 3.14a. În acset caz, matricea de rigiditate a struc-

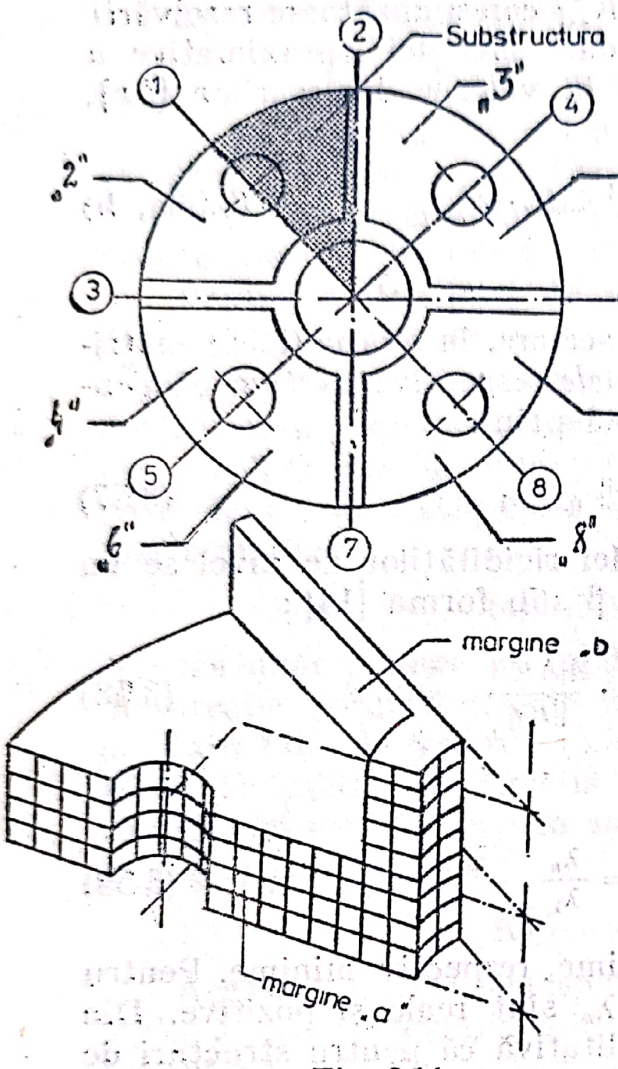


Fig. 3.14.

turii $K^c_{I,I}$ este de formă tridiagonală, utilizînd pentru rezolvarea sistemului de ecuații algoritmul (3.51—52).

Matricele de influență între substructuri, K_1 și K_2, sînt în cazul general diferite; o substructură neavînd simetrie față de axele proprii, marginile a și b fiind diferite, substructurile sînt dispuse alternativ ca orientare. Rezultă :

$$K_1 = K^a_{I,I} + K^a_{I,I}\,; \quad K_2 = K^b_{I,I} + K^b_{I,I}\,; \quad C = K^{a,b}_{I\,I}. \tag{3.60}$$

Astfel, și în acest caz, obținîndu-se o matrice de forma tridiagonală pentru structura în ansamblu, se poate aplica algoritmul de rezolvare (3.34), reducîndu-se astfel foarte mult volumul de calcul și îndeosebi volumul de date de intrare care se pot rezuma de această dată la nodurile și elementele unei substructuri.

3.5. STRUCTURI AVÎND PROPRIETĂȚI REOLOGICE

Majoritatea materialelor utilizate în construcții au proprietăți reologice, adică prezintă o evoluție a relației „forță-deplasare" sau „efort — deformație" sub acțiunea factorului timp. Pentru

studiul comportării acestor corpuri, este necesară elaborarea unor modele mai complexe decît modelul lui Hook pentru corpul ideal elastic. În cazul adoptării unor modele simplificate, incertitudinile cresc, iar valoarea și eficiența modelului scade substanțial. Pe de altă parte, adoptarea unor modele foarte complexe ridică dificultăți de calcul extrem de mari, ceea ce face prohibit un astfel de calcul. În aceste condiții, în prezent, cu posibilitățile de calcul automatizat existente și a cunoștințelor teoretice și experimentale dobîndite, adoptarea unor modele reologice simple de tip Kelvin-Voigt sau Maxwell sau a altor modele de tip vîscoelastice cu comportare reologică lineară este optimă [17].

Calculul și studiul comportării în timp a structurilor mai prezintă o dificultate datorită neomogenității proprietăților reologice ale diferitelor părți din structură. Pot fi exemplificate structurile mixte oțel-beton (tabliere metalice conlucrînd cu dala de beton, grinzi și stîlpi metalici cu beton armat), grinzi și arce de beton armat cu tiranți metalici, suprastructuri metalice pe infrastructuri de beton sau zidărie etc., la care, pentru încărcările de exploatare, oțelul se comportă ca un material ideal elastic, iar betonul ca un material vîsco-elastic. O altă categorie de probleme de acest gen o constituie cele legate de studiul interacțiunii structură-teren, în care structura este idealizată ca un corp ideal elastic (într-o primă evaluare), iar terenul ca un corp cu proprietăți reologice ; studiul interacțiunii cu terenul poate fi extins într-o evaluare ulterioară, adoptînd și pentru suprastructură un model de corp reologic.

Pentru structurile alcătuite din elemente ce nu pot fi asimilate cu bare (diafragme, plăci curbe, masive), utilizarea elementelor finite este utilă. În acest caz, aplicarea procedeului de calcul prin divizare în substructuri prezintă avantaje substanțiale pentru analiza și calculul numeric efectiv. Deși ipotezele vîsco-elasticității lineare limitează gradul de fidelitate în reproducerea fenomenului reologic al materialelor de construcție reale, totuși prin aplicarea lor se poate rezolva un număr important de probleme practice, evaluîndu-se cel puțin calitativ redistribuția eforturilor și deformațiilor în timp, fenomen cu implicații importante asupra siguranței și durabilității structurilor [17].

Conform teoriei vîsco-elasticității lineare, se va considera fenomenul în domeniul micilor deformații, în care caz este valabil *principiul suprapunerii* a lui L. Boltzmann. Conform acestui prin-

Scanned with OKEN Scanner

cipiu, dacă la timpii $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ se aplică încărcările $P_1, P_2, \ldots, P_n$ care se mențin constante, atunci la un timp t deformația totală $\varepsilon(t)$ va fi:

$$\varepsilon(t)=P_1 \cdot f(t-\tau_1)+P_2 f(t-\tau_2)+ \ldots +P_n f(t-\tau_n). \quad (3.64)$$

unde $f(t-\tau_i)$ este funcția de fluaj [12, 17]. Dacă încărcarea este o funcție continuă de τ în intervalul $0<\tau<t$, relația (3.64) devine:

$$\varepsilon(t)=\int_0^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot f(t-\tau)d\tau, \quad (3.62)$$

Principiul suprapunerii a lui Boltzmann este valabil și în cazul încărcării de relaxare, cînd la timpii τ_i se aplică deformații impuse ε_i

$$\sigma(t)=\int_0^t \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \tau} \cdot r(t-\tau)d\tau, \quad (3.63)$$

unde $r(t-\tau)$ — este funcția de relaxare.

Un instrument deosebit de eficace pentru calcul îl constituie aplicarea *calculului operațional*, cu ajutorul căruia problemele de vîsco-elasticitate liniară se reduc la probleme de elasticitate liniară, respectiv ecuațiile diferențiale sau integrale se reduc la ecuații algebrice liniare.

Conform calculului operațional, o funcție $f(t)$ denumită „original" în domeniul timp t, are o transformată $F(p)$ în domeniul p, denumită „imagine" determinată conform transformării Laplace:

$$F(p)=\mathfrak{L} f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt. \quad (3.64)$$

Pentru o funcție $F(p)$ cunoscută, „originalul" $f(t)$ se determină cu formula de inversiune Mellin-Fourier (dacă f (t) este diferențiabilă);

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp. \quad (3.65)$$

Modelele reologice liniare elementare au la bază două modele fundamentale: modelul Hook și modelul Newton, caracterizate prin ecuațiile de condiție:

$$\sigma^H(t)=E \cdot \varepsilon(t); \quad \sigma^N(t)=\eta \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (3.66)$$

Scanned with OKEN Scanner

Combinarea celor două modele elementare prin legarea lor în serie sau în paralel conduce la obținerea unor noi modele reologice liniare și anume modelul Maxwell și modelul Kelvin-Voigt [12, 17].

Prin aplicarea calculului operațional, pentru toate modelele reologice obținute din combinarea modelului Hook cu modelul Newton, există următoarea relație între „imaginile" tensiunilor și deformațiilor

$$\hat{\sigma}(p)=\hat{E}(p)\cdot\hat{\varepsilon}(p), \tag{3.67}$$

unde : $\hat{E}(p)$, $\hat{\sigma}(p)$, $\hat{\varepsilon}(p)$ sînt imaginile pentru E, σ, ε.

Pentru cazul modelului Kelvin-Voigt se obține :

$$\hat{E}(p)=E+p\cdot\eta, \tag{3.68}$$

iar pentru modelul Maxwell

$$\hat{E}(p)=\frac{pE\eta}{E+p\eta}. \tag{3.69}$$

În aceste relații E este modulul de elasticitate al componentei elastice, iar η este caracteristica de vîscozitate a componentei vîscoase ; cele două constante sînt legate prin constanta T_{rel}, denumită și „timp de relaxare"

$$\eta=T_{rel}\cdot E. \tag{3.70}$$

În cele ce urmează se consideră cazul mai simplificat al unor structuri alcătuite din două substructuri și anume : o substructură cu proprietăți exclusiv elastice (model Hooke) și o substructură cu proprietăți vîsco-elastice. Pentru diferențiere în notare, se va utiliza indicele superior H pentru mărimile (tensiuni, forțe, deformații etc.) aferente substructurii elastice și indicele R pentru mărimile similare aferente substructurii vîsco-elastice. Structura se presupune solicitată numai de încărcări constante în timp, aplicate sub formă de trepte de încărcare [7, 16]. Conform notațiilor din paragraful 3.2, indicii inferiori N și I se referă la nodurile interioare, respectiv de „contact". Vectorul încărcării exterioare cuprinde 3 vectori componenți $\{P_N^H\}$, $\{P_N^R\}$, $\{P_I\}$. Încărcările sînt

aplicate pe corpul elastic, vîsco-elastic sau pe linia de intersecție. Aplicînd relațiile (3.6 a,b) celor două substructuri, se obține :

$$\begin{aligned} &K^H_{N,N}\cdot\{\delta^H_N(t)\}+K^H_{N,I}\{\delta_I(t)\}=\{P^H_N\}\theta(t)\\ &K^H_{I,N}\cdot\{\delta^H_N(t)\}+K^H_{I,I}\{\delta_I(t)\}=\{P_I\}\theta(t)+\{R(t)\}\\ &K^R_{N,N}\cdot\{\delta^R_N(t)\}+K^R_{N,I}\cdot\{\delta_I(t)\}=\{P^R_N\}\theta(t)\\ &K^R_{I,N}\cdot\{\delta^R_N(t)\}+K^R_{I,I}\cdot\{\delta_I(t)\}=-\{R(t)\}, \end{aligned} \tag{3.71}$$

$\theta(t)$ fiind funcția treaptă a lui Heavside.

Presupunînd că pentru substructura vîsco-elastică este valabil modelul Kelvin-Voigt, aplicînd calculul operațional sistemului (3.71) și ținînd cont că :

$$\widehat{K^H}=K^H;\quad \widehat{K^R}=K^R+pT_{rel}\cdot K^R, \tag{3.72}$$

se obține sistemul de ecuații al „imaginilor".

Exprimînd pe $\widehat{\delta}^H_N(p)$ și $\widehat{\delta}^R_N(p)$ în funcție de $\widehat{\delta}_I(p)$, se obține, ținînd cont de relația (3.10), ecuația matriceală :

$$\left[\tilde{K}^H_{I,I}+(1+pT_{rel})\tilde{K}^R_{I,I}\right]\left\{\widehat{\delta}_I(p)\right\}=\frac{1}{p}\cdot\{P_{IN}\}. \tag{3.73}$$

Pentru rezolvarea lui $\widehat{\delta}_I(p)$, expresia (3.73) se pune sub forma :

$$[\Gamma+pT_{rel}I]\tilde{K}^R_{I,I}\cdot\{\widehat{\delta}_I(p)\}=\frac{1}{p}\cdot\{P_{IN}\}, \tag{3.73a}$$

unde cu Γ s-a notat matricea

$$\Gamma=\tilde{K}^H_{I,I}[\tilde{K}^R_{I,I}]^{-1};\quad \tilde{K}_{I,I}=\tilde{K}^R_{I,I}+\tilde{K}^H_{I,I}. \tag{3.74}$$

Matricea Γ se mai poate exprima și prin descompunere *spectrală* sub forma :

$$\Gamma=\sum_i^n \lambda_i\cdot G_i, \tag{3.75}$$

unde λ_i — sînt valorile proprii ale matricei Γ, iar G_i sînt componentele matricei Γ, avînd rangul 1.

Scanned with OKEN Scanner

Componentele matricei Γ se determină astfel:

$$G_i=\{U_i\}\cdot\{U_i^T\}, \tag{3.76}$$

unde $\{U_i\}$ este vectorul propriu „i" al matricei.

În acest fel, vectorul imagine a deplasărilor nodurilor de la interfață $\hat{\delta}_I(p)$ are expresia:

$$\{\hat{\delta}_I(p)\}=[\tilde{K}_{I,I}^R]^{-1}\left(\sum_{i+1}^{n}\frac{1}{p(\lambda_i+pT_{rel})}G_i\right)\cdot\{P_{IN}\}. \tag{3.77}$$

Aplicînd transformata inversă, cu ajutorul formulei lui Heaviside se obține originanlul $\{\delta_I(t)\}$, pentru $\alpha_i=\lambda_i/T_{rel}$:

$$\{\delta_I(t)\}=[\tilde{K}_{I,I}^R]^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{\lambda_i}(1-e^{-\alpha_i t})\right)\cdot\{P_{IN}\}. \tag{3.78}$$

Se observă că pentru $t=0$, $\delta_I(0)=0$, iar pentru $t=\infty$, $\delta_I(\infty)=[K_{I,I}]^{-1}\cdot\{P_{IN}\}$, ceea ce corespunde soluției „elastice".

Pentru vectorii deplasărilor $\{\delta_N^H\}$ și $\{\delta_N^R\}$, din sistemul (3.71) se obțin expresiile corespunzătoare imaginilor $\{\hat{\delta}_N^H(p)\}$ și $\{\hat{\delta}_N^R\}$, iar prin transformarea inversă se obțin expresiile $\{\delta_N^H(t)\}$ și $\{\delta_N^R(t)\}$:

$$\{\delta_N^H(t)\}=[K_{N,N}^H]^{-1}\cdot\{P_N^H\}\cdot\theta(t)-[K_{N,N}^H]^{-1}\cdot K_{N,I}^H\cdot\{\delta_I(t)\} \tag{3.79}$$

$$\{\delta_N^R(t)\}=[K_{N,N}^R]^{-1}\{P_N^R\}(1-e^{-t/T_{rel}})-[K_{N,N}^R]^{-1}\cdot K_{N,I}^R\cdot\{\delta_I(t)\}.$$

La momentul $t=0$, cînd se aplică încărcarea $P(t)=P\cdot\theta(t)$,

$$\{\tilde{\delta}_N^H(0)\}=[K_{N,N}^H]^{-1}\cdot\{P_N^H\};\ \{\delta_N^R(0)\}=0. \tag{3.80}$$

La timpul $t=\infty$, după epuizarea deformațiilor vîscoase, deplasările $\{\delta_N^H\}$ și $\{\delta_N^R\}$ corespund unei structuri integral elastice.
Eforturile unitare în substructura elastică rezultă

$$\{\sigma_m^H\}=D_H B_m\cdot\{\delta_N^H(t)\}, \tag{3.81}$$

unde: D este matricea de elasticitate pentru substructura elastică, iar

B_m — matricea corespunzătoare elementului finit m.

Eforturile unitare în substructura vîsco-elastică se obțin prin transformarea inversă a expresiei

$$\{\widehat{\sigma}_{ki}^{R}\}=D_R B_k\,(1+pT_{rel})\cdot\{\widehat{\delta}_N^R\,(p)\}, \tag{3.82}$$

unde: D_R este matricea de elasticitate pentru substructura vîsco-elastică.

Expresia lui $\{\sigma_k^R\,(t)\}$ devine:

$$\{\sigma_k^R\,(t)\}=D_R B_k\,[K_{N,N}^R]^{-1}\cdot\{P_N^R\}\theta\,(t)-D_R B_k[K_{N,N}^R]^{-1}\cdot$$

$$\cdot K_{N,I}^R\,[\widehat{K}_{I,I}^R]^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{\lambda i}\,[1+(\lambda_i-1)\cdot e^{\alpha_i\cdot t}]\{P_{IN}\}. \tag{3.83}$$

Primul termen din membrul drept al ecuației (3.83) corespunde eforturilor unitare în substructura vîsco-elastică, considerînd blocate nodurile de pe linia de intersecție, $\{\overline{\sigma}_k^R\}$.

La timpul $t=\infty$ se obține:

$$\sigma_k^R\,(\infty)=\overline{\sigma}_k^R-D_R B_k[K_{N,N}^R]^{-1}\cdot K_{N,I}^R\,[\widetilde{K}_{I\,I}]^{-1}\cdot\{P_{IN}\}. \tag{3.84}$$

Această relație corespunde eforturilor unitare în ipoteza structurii integral elastice. După cum era de așteptat, structura nu prezintă fenomenul de relaxare.

Dacă se presupune acum că substructura vîsco-elastică corespunde unui model Maxwell, imaginea matricei de rigiditate are expresia:

$$\widehat{K}^R=\frac{pT_{rel}}{1+pT_{rel}}\cdot K^R. \tag{3.85}$$

Aplicînd același procedeu de calcul ca pentru modelul Kelvin-Voigt, se obține în final expresia efortului unitar în substructura „vîsco-elastică":

$$\{\sigma_N^R(t)\}=D_R B_k[K_{N,N}^R]^{-1}\cdot[\{P_N^R\}-K_{N,I}^R[\widetilde{K}_{I,I}^R]^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{\lambda_i}\cdot e^{-\beta_i t}\right)\{P_{I,N}^R\}. \tag{3.86}$$

Se observă că termenul al doilea scade ca mărime cu creșterea lui t, evidențiind caracterul de relaxare al eforturilor unitare în substructura vîsco-elastică.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru studiul structurilor din beton și beton armat, la care se manifestă fenomenul de curgere lentă (fluajul betonului), modelele Kelvin-Voigt și Maxwell nu sînt satisfăcătoare. În acest caz este mai indicat a se pleca de la o funcție de fluaj cunoscută.

Astfel, relația (3.62) poate fi pusă și sub forma:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E_0}-\int_0^t \sigma_{(\tau)}\cdot\frac{d\varepsilon_c}{d\tau}\cdot d\tau. \tag{3.87}$$

În relația (3.87) s-a presupus că modulul de elasticitate al betonului E_0 nu variază în timp. Pentru deformația de curgere lentă se va admite relația de forma următoare [1, 17]:

$$\varepsilon_c=C_0[1-e^{\gamma(t-\tau)}], \tag{3.88}$$

unde C_0 este măsura curgerii lente pentru $t=\infty$. Cu relația (3.88) expresia lui $\varepsilon(t)$ devine:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E_0}+C_0\gamma\int_0^t \sigma(\tau)\,e^{-\gamma(t-\tau)}\,d\tau. \tag{3.89}$$

Aplicînd transformata Laplace relației (3.98) se obține relația între „imaginile" $\widehat{\varepsilon}(p)$ și $\widehat{\sigma}(p)$:

$$E_0\widehat{\varepsilon}(p)=\widehat{\sigma}(p)+E_0C_0\gamma\cdot\widehat{\sigma}(p)\cdot\frac{1}{p+\gamma} \tag{3.90}$$

sau ținînd cont că $E_0\cdot C_0=\varphi$ (coeficientului de curgere lentă finală), se obține

$$\widehat{E}(p)=E_0\,\frac{p+\gamma}{p+\gamma(1+\varphi)}. \tag{3.91}$$

Cu relația (3.91), aplicînd transformata Laplace ecuațiilor de condiție pentru substructura vîsco-elastică se obțin ecuații matriceale similare cu (3.71). Rezolvarea acestui sistem de ecuații pentru „imagini" și aplicarea transformării inverse conduc în final la obținerea expresiei deplasării nodurilor de contact:

$$\{\delta_I(t)\}=[\tilde{K}^R_{I,I}]^{-1}\left(\sum_{i=1} f_i(t)G_i\right)\{P_{IN}\}, \tag{3.92}$$

unde:

$$f_i(t)=\frac{1}{\varphi+\lambda_i}(1+\varphi-\mu_i\varphi\cdot e^{-s_i t}), \tag{3.93}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar $$\mu_i = \frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i}; \quad s_i = \gamma \frac{\lambda_i + \varphi}{\lambda_i}. \tag{3.94a, b}$$

Pentru $t = \infty$; $f_i(\infty) = \frac{1+\varphi}{\lambda_i+\varphi}$. (3.95)

Se observă că :

$$f_i(\infty) < f_i(0) \text{ pentru } \lambda_i < 1{,}0$$
$$f_i(\infty) > f_i(0) \text{ pentru } \lambda_i > 1{,}0. \tag{3.96}$$

Vectorii deplasărilor $\{\delta_N^H\}$ și $\{\delta_N^R\}$ vor rezulta :

$$\{\delta_N^H(t)\} = [K_{N,N}^H]^{-1} \cdot \{P_N^H\} - [K_{N,N}^H]^{-1} \cdot K_{N,I}^H \cdot \{\delta_I(t)\}. \tag{3.97}$$

Pentru $t=0$

$$\delta_N^H(0) = \delta_N^H \text{ (elastic)}$$

$$\{\delta_N^R(t)\} = \{\overline{\delta}_N^R\}[1 + (1 - e^{-\gamma t})] - [K_{N,N}^R]^{-1} \cdot K_{N,I}^R \cdot \{\delta_I(t)\}. \tag{3.98}$$

Pentru $t=0$

$$\delta_N^R(0) = \delta_N^R \text{ (elastic)}.$$

Din relațiile de mai sus se observă că pentru substructura elastică, deplasările $\{\delta_N^H\}$ variază în timp numai din influența deplasărilor nodurilor de intersecție $\{\delta_I\}$, în timp ce pentru substructura vîscoelastică, deplasările $\{\delta_N^R\}$ variază mai mult, primul termen crescînd proporțional cu deformația de curgere lentă ε_c.

Eforturile unitare în substructura elastică sînt proporționale cu deplasările $\{\delta_N^H\}$, rezultînd :

$$\{\sigma_N^H(t)\} = D_R B_k \{\delta_N^H(t)\} = \{\overline{\sigma}_N^H\} - D_H B_m [K_{N,N}^R]^{-1} \cdot K_{N,I}^H \{\delta_I(t)\}. \tag{3.99}$$

Pentru substructura vîsco-elastică, prin rezolvarea sistemului de ecuații al „imaginilor" se obține $\hat{\delta}_N^R(p)$ cu relația (3.91) și apoi prin transformarea inversă se determină în final expresia „original" pentru $\sigma^R(t)$

$$\{\sigma_N^R(t)\} = \{\sigma_N^R\} - D_R B_m [K_{N,N}^R]^{-1} \cdot K_{N,I}^R [\tilde{K}_{I,I}^R]^{-1} \left(\sum_1^n h_i(t) G_i \right) \{P_{I,N}\}, \tag{3.100}$$

unde : $$h_i(t)=\frac{1}{\varphi+\lambda_i}\left(1+\frac{\varphi}{\lambda_i}e^{-s_i t}\right). \qquad (3.101)$$

Pentru $t=0$ se obține expresia efortului unitar corespunzător structurii integral elastice.

Pentru $t=\infty$ se obține :

$$\{\sigma_N^R(\infty)\}=\{\bar{\sigma}_N^R\}-D_H B_m[K_{N,N}^R]^{-1}\cdot K_{N.I}^R\,[\tilde{K}_{I,I}^R]^{-1}\cdot[\Gamma+\varphi I]^{-1}\cdot\{P_{IN}\}. \qquad (3.102)$$

Din compararea expresiilor (3.101) și (3.102) se observă că termenul al doilea descrește asimptotic cu t, evidențiind caracterul de relaxare al eforturilor unitare. Pentru calculul numeric efectiv trebuie remarcat faptul că, relația (3.75) este aplicabilă numai pentru matrici normale. Din această cauză, pentru cazul curent, matricea Γ se aduce la o formă normală printr-o transformare adecvată :

$$\Gamma^*=T^{-1}\cdot\Gamma\cdot T. \qquad (3.103)$$

Aplicînd descompunerea spectrală pentru matricea Γ^*, componentele spectrale ale matricei Γ se vor determina astfel :

$$G_i=T\cdot G_i^*\cdot T^{-1}\ ;\ G_i^*=\{U_i^*\}\{U_i^*\}^T. \qquad (3.104)$$

Valorile proprii ale matricei Γ^* sînt identice cu cele ale matricei Γ.

Pentru ilustrarea procedeului de calcul expus, se dă mai jos un exemplu numeric ce poate fi urmărit prin calcul manual.

Structura din figură (3.15) este alcătuită din grinda de beton armat (substructură R) și pilonul metalic cu tiranți oblici (substructura H) ; structura e încărcată în punctul „a“ cu $P=10\,000$ N,

Matricele de rigiditate „totale“ ale substructurilor sînt date astfel :

$$K^H=10^4\left[\begin{array}{c|cc} 12{,}20 & 16{,}33 & 22{,}50 \\ \hline 16{,}33 & 20{,}50 & 36{,}60 \\ 22{,}50 & 36{,}60 & 43{,}15 \end{array}\right]\ ;\ K^R=10^4\left[\begin{array}{c|cc} 18{,}60 & 24{,}75 & 38{,}23 \\ \hline 24{,}75 & 36{,}50 & 46{,}00 \\ 38{,}23 & 46{,}0 & 87{,}50 \end{array}\right]$$

$N \qquad I \qquad\qquad N \qquad I$

Scanned with OKEN Scanner

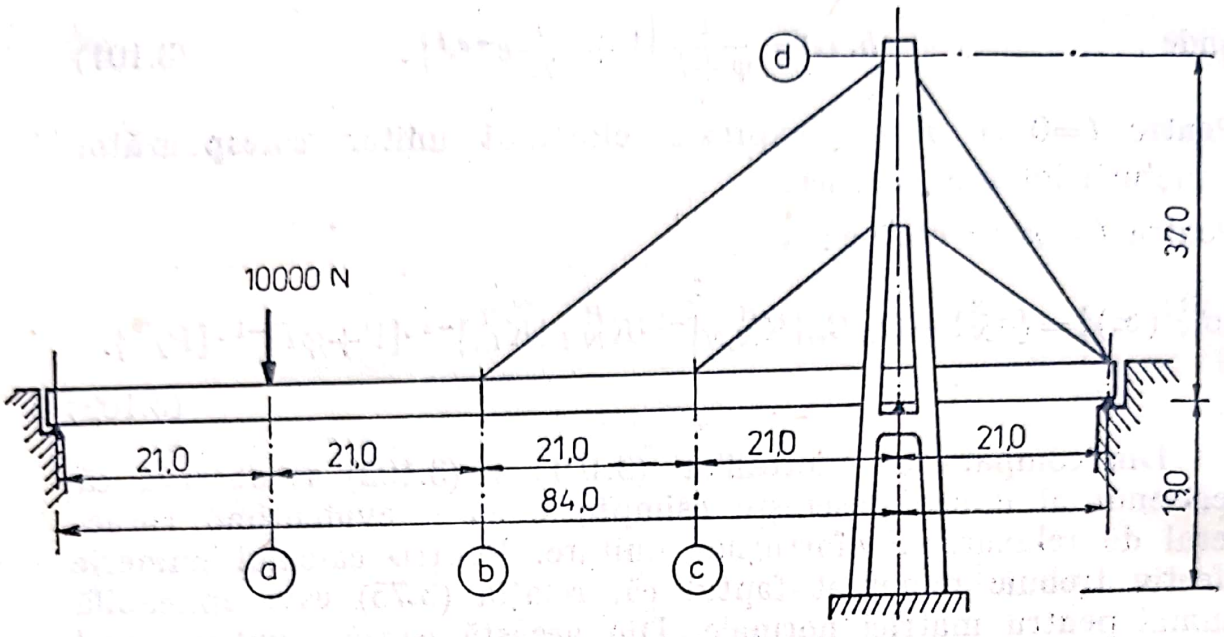


Fig. 3.15.

Valorile elementelor matricelor sînt exprimate în N/m. Matricele de rigiditate „condensate" sînt :

$$\tilde{K}^{H}_{I,I} = \begin{bmatrix} 20{,}50 & 36{,}60 \\ 36{,}60 & 43{,}15 \end{bmatrix} - \frac{1}{12{,}20} \cdot [16{,}33 \quad 22{,}50] = \begin{bmatrix} -1{,}36 & 6{,}48 \\ 6{,}48 & 1{,}65 \end{bmatrix} 10^4$$

$$\tilde{K}^{R}_{I,I} = \begin{bmatrix} 36{,}50 & 46{,}00 \\ 46{,}00 & 87{,}50 \end{bmatrix} - \frac{1}{18{,}60} \cdot [24{,}75 \quad 38{,}32] = \begin{bmatrix} 3{,}60 & -4{,}88 \\ -4{,}88 & 8{,}92 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Matricea Γ va fi :

$$\Gamma = \tilde{K}_{I,I} \cdot [\tilde{K}^{R}_{I,I}]^{-1} = \begin{bmatrix} 3{,}5520 & 2{,}12945 \\ 9{,}4255 & 5{,}80960 \end{bmatrix}.$$

Pentru a determina valorile proprii λ ale formei matriceale Γ, se aduce aceasta la o formă simetrică prin transformarea :

$$\Gamma^* = T^{-1} \cdot \Gamma \cdot T \text{ ; unde } T = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & a \end{bmatrix},$$

iar $a = \sqrt{\frac{8{,}4255}{2{,}12945}} = 1{,}9891$

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}5027 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3{,}552 & 2{,}12945 \\ 8{,}4255 & 5{,}80960 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}000 \\ 0{,}0 & 1{,}989 \end{bmatrix}.$$

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} 3{,}552 & 4{,}237 \\ 4{,}237 & 5{,}900. \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile proprii ale lui Γ^* sînt $\lambda_1=9{,}122$; $\lambda_2=0{,}330$, iar vectorii proprii ai lui Γ^* sînt :

$$U_1=\begin{Bmatrix}0{,}6054\\0{,}7959\end{Bmatrix};\quad U_2=\begin{Bmatrix}0{,}7959\\-0{,}6054\end{Bmatrix}.$$

Matricele componente spectrale ale lui Γ vor fi :

$$G_1=T\cdot G_1^*\cdot T^{-1}=T\cdot U_1^*\,[U_1^*]^T\cdot T^{-1}$$

$$G_1=\begin{bmatrix}1{,}0 & 0{,}0\\0{,}0 & 1{,}989\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0{,}6054\\0{,}796\end{Bmatrix}\{0{,}6054\quad 0{,}796\}\begin{bmatrix}1{,}00 & 0{,}0\\0{,}0 & 0{,}503\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0{,}3677 & 0{,}2411\\0{,}9643 & 0{,}6322\end{bmatrix};\quad G_2=\begin{bmatrix}0{,}6322 & -0{,}2411\\-0{,}9643 & 0{,}3677\end{bmatrix}.$$

Vectorul încărcării „condensate“ $\{P_{IN}\}$ este :

$$\{P_{IN}\}=\{P_I\}-K^R_{I,N}[K^R_{N,N}]^{-1}\{P^R_N\}-K^H_{I,N}[K^H_{N,N}]^{-1}\cdot\{P^H_N\}=$$

$$=-\frac{1}{18{,}6}\begin{bmatrix}24{,}75\\38{,}23\end{bmatrix}\cdot\{10\,000\}=-\begin{Bmatrix}13\,306\\20\,554\end{Bmatrix}.$$

Pentru caracteristica de curgere lentă finală se presupune $\varphi=2{,}70$; în acest caz coeficienții μ_1. μ_2, s_1 și s_2 rezultă :

$$\mu_1=\frac{9{,}122-1{,}0}{9{,}122}=0{,}8904\ ;\quad \mu_2=\frac{0{,}33-1{,}0}{0{,}33}=-2{,}030\ ;$$

$$s_1=0{,}85\,\frac{9{,}122+2{,}70}{9{,}122}=1{,}105\ ;\quad s_2=0{,}85\,\frac{0{,}33+2{,}70}{0{,}33}=7{,}806.$$

Funcţiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ vor avea expresiile :

$$f_1(t)=0{,}3162-0{,}2094\cdot e^{-1{,}105t}$$

$$f_2(t)=1{,}233+2{,}098\,e^{-7{,}81t}.$$

Deplasările nodurilor de „interfață“ $\{\delta_I(t)\}$ vor avea expresia :

$$\{\delta_I(t)\}=f_1(t)\cdot[\tilde K^R_{I,I}]G_1\{P_{IN}\}+f_2(t)\cdot[\tilde K^R_{I,I}]^{-1}\cdot G_2\{P_{IN}\}=$$

$$=-\begin{Bmatrix}0{,}9426\\0{,}5359\end{Bmatrix}+0{,}2049\begin{Bmatrix}2{,}731\\1{,}789\end{Bmatrix}e^{-1{,}105t}-2{,}098\begin{bmatrix}0{,}064\\-0{,}024\end{bmatrix}e^{-7{,}80t}.$$

Pentru $t=0$, $\delta_I(0)=-\begin{bmatrix}0{,}517\\0{,}119\end{bmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

pentru $t=\infty$, $\delta_1(\infty)=-\begin{Bmatrix}0{,}9426\\0{,}5359\end{Bmatrix}$.

Pentru eforturile în grinda de beton armat (momentul încovoietor în secțiunea „a") se determină în primul rînd coeficienții $h_i(t)$:

$$h_1(t)=\frac{1}{11{,}82}\left(1+\frac{2{,}7}{9{,}122}\cdot e^{-1{,}105t}\right)=0{,}0846+0{,}0250\,e^{-1{,}105t}$$

$$h_2(t)=\frac{1}{3{,}03}\left(1+\frac{2{,}70}{0{,}33}\cdot e^{-7{,}8t}\right)=0{,}330+2{,}70\,e^{-7{,}8t}.$$

În situația cu nodurile b și c blocate, momentul în punctul „a" pentru valoarea lui $(B_M D_R)=7\,350$ kN este:

$$M_a=7\,350\,\frac{1}{18{,}6}(10\,000)\cdot 10^{-4}=395{,}2\text{ kNm}.$$

Pentru $t=0$, $h_1(0)=0{,}1096$, $h_2(0)=3{,}03$, rezultă:

$$M_a(0)=395{,}2-7\,350\left[\frac{1}{18{,}6}\right]\cdot[24{,}75\quad 38{,}23]\cdot\left[0{,}1096\begin{Bmatrix}2{,}731\\1{,}789\end{Bmatrix}+\right.$$

$$\left.+3{,}03\begin{Bmatrix}0{,}006\\-0{,}024\end{Bmatrix}\right]=7073{,}5\text{ kNm}.$$

Pentru $t=\infty$, $h_1=(0)=0{,}0846$, $h_2(\infty)=0{,}330$.

$$M_a(\infty)=395{,}2+[9\,780\quad 15\,100]\cdot\left[0{,}0846\begin{Bmatrix}2{,}731\\1{,}789\end{Bmatrix}+\right.$$

$$\left.+0{,}330\begin{Bmatrix}0{,}064\\-0{,}024\end{Bmatrix}\right]=5022{,}8\text{ kNm}.$$

Deci momentul încovoietor în grinda de beton armat scade cu 29%.

Bibliografie

1. Avram, C., Anastasescu, D. *Structuri spațiale*, Editura Academiei R.S.R. București, 1978.
2. Chamecki, S. *Calcul des tassements progressifs des fondations, en tenant compte de l'interaction des structures et du sol*, Annales I.T.B.T.A., Nr. 261, Paris, 1969.
3. Dunder, V., Ridlon, St. *Practical Applications of Finite Element Method*, Journal of the Structural Division ST 1 vol 104, 1978.
4. Fenves, S.V. *Structural Analysis by Networks Matrices*. Journal of the Structural Division, vol 92, ST1, 1966
5. Gallagher, R.H. *Large-Scale Computer Programs for Structural Analysis*, Computers and Structures, vol 2, Nr. 5/6, 1975
6. Gheorghiu, A., Dragomir, V. *Probleme de reprezentare a structurilor constructive*, Ed. Tehnică, București, 1968.
7. Gheorghiu, Alex. *Concepții moderne în calculul structurilor*, Ed. Tehnică, București, 1975.
8. Livesley, R.K. *Matrix Methods of Structural Analysis*. Pergamon Press. Mac Milan Co. New York, 1964.
9. Massonet, Ch. ș.a. *Calculul structurilor la calculatoare electronice* (trad. din limba franceză). Ed. tehnică, București, 1974.
10. Meyer, C. *Special Problems Related to Linear Ecuation Solvers*. Journal of the Structural Division, vol 101, ST4, 1975.
11. Melosh, R.J., Bamford, R.M. *Efficient Solution of Load — Deflection Equation*, Journal of the Structural Division, vol 97, 1971.
12. Robinson, J. *Integrated Theory of Finite Element Methods*, John Wiley & Sons. New York, 1973.
13. Rosen, R., Rubinstein, M. *Substructure Analysis by Matrix Decomposition* Journal of the ASCE, No. 663/70, 1970.
14. Roy, J.R. *Über den numerischen Fehler bei der Auflösung von Linearen Gleichungssystemen der Statik*, in *Finite Elemente in der Statik*. W. Ernest und Sohn, 1973.
15. Sandi, H. *Metode matriceale în mecanica structurilor*, Ed. tehnică, București, 1976.
16. Utku, S.M. *Systematic Substructuring*, Journal of the Structural Division, ST4 101, 1975.
17. Valcum, Alex. *Studiul reologic al corpurilor solide*, Ed. Academiei R.S.R. București, 1978,
18. Wunderlich, W. *Finite-Element Methoden als direkte Variationsverfahren der Elastostatik*, in *Finite Elemente in der Statik*, W. Ernst u. Sohn, Berlin, 1973.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4

Posibilităţi privind utilizarea metodei elementelor finite la analiza modului de cedare a structurilor

4.1. CONSIDERAŢII PRIVIND RUPEREA ELEMENTELOR DE BETON SAU ALTOR MATERIALE ETEROGENE

Problematica referitoare la ruperea betonului sub diverse moduri de solicitare şi condiţii ambientale a cunoscut şi cunoaşte încă un cîmp foarte larg şi intens de cercetare, avîndu-se în vedere importanţa majoră a concluziilor, aplicaţiilor în practică şi a consecinţelor din exploatare. Această sferă de probleme este cea mai direct legată de evaluarea siguranţei unei structuri de rezistenţă.

Cum era şi firesc, prima teorie de rupere a betonului a avut un caracter pur „mecanicist", reducînd fenomenul ruperii la o condiţie de limitare a valorii efortului unitar, comparativ cu o valoare presupusă constantă şi determinată în condiţii standardizate. Această metodă a „rezistenţelor admisibile" face abstracţie atît de starea de tensiune (monoaxială, plană, triaxială), cît şi de factorii ambientali, ca viteza de încărcare, proprietăţi reologice şi temperatura mediului. Cu toate acestea, mult timp încă teoriile de rupere dezvoltate ulterior au fost definite din punctul de ve-

Scanned with OKEN Scanner

dere al aspectului fizic, în cadrul unui concept pur mecanic, admiţînd pentru fenomenul ruperii trei ipoteze fundamentale:

1) Corpul este un *mediu continuu* atît în timpul solicitării, cît şi în momentul ruperii.

2) Ruperea se produce *instantaneu* fără implicarea variabilei „timp".

3) Pe tot timpul solicitării corpul *nu-şi modifică structura* sa şi *nu are schimb energetic* cu mediul exterior (ipoteza comportării *izentropice*).

În acest sens, trecînd în revistă teroiile clasice de rupere ale betonului (deformaţiei specifice maxime, efortului tangenţial maxim, energiei specifice de deformaţie etc.), se constată că ele expun într-o formă sau alta o relaţie între tensorul eforturilor unitare sau tensorul deformaţiilor specifice şi cîteva constante etalon determinate în condiţii standardizate (chiar şi criteriul de curgere a lui Mises are aceeaşi structură fizică). Or, asemenea relaţii satisfac tocmai cele trei ipoteze sus-amintite: mediu continuu, rupere instantanee şi izentropică. Tipic pentru cercetările efectuate în ultimele trei decenii în această manieră este forma generală a ecuaţiei condiţiei de rupere; $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0$. În unele lucrări, aceste relaţii se stabilesc pe baza ipotezelor cunoscute din teoria plasticităţii (Vasiliev, A.N., Gheniev, G.A., Tarasenko, I.I., Bresler, B. şi Pister, K. ş.a.). În toate aceste formulări nu se pot cuprinde cazurile particulare de stări de tensiune complexe, cînd se recurg la forme generalizate empirice (Verighin, K.P., Smith, G. ş.a.) [45].

Pentru starea de tensiune spaţială, Filonenko-Borodici [16] şi Gheniev, G.A. [21] propun într-o formă generală ecuaţia unei suprafeţe parabolice în sistemul de coordonate σ_1. σ_2, σ_3.

Într-o modalitate puţin diferită sînt orientate lucrările consacrate stabilirii unor relaţii între eforturile unitare octaedrice, în cazul unor solicitări mai simple, aplicate apoi cu corecţii, stărilor de efort mai complexe. În lucrarea lui Bresler şi Pister [7], bazată pe experienţe pe epruvete cilindrice goale în interior, se propune o relaţie de forma:

$$\tau_{oct}/R_c=1{,}16\ \sigma_{oct}/R_c+0{,}086, \qquad (4.1)$$

unde τ_{oct} şi σ_{oct} sînt tensiunile tangenţiale, respectiv normale, octaedrice.

Această relație (4.1) este asemănătoare ca formă matematică cu cea stabilită de Blakey, F. și Beresford, F. [4]:

$$I_1^2 - 2I_2 + 2{,}4R_cI_1 = 3{,}4R_t^2, \qquad (4.2)$$

unde I_1, I_2 sînt invarianții tensorului tensiunilor iar R_c și R_t sînt rezistențele la compresiune, respectiv întindere în starea de tensiune monoaxială. Deoarece nici o astfel de teorie nu corespunde cazului general de solicitare, pentru necesitățile practice de proiectare s-a recurs la curbe înfășurătoare pentru stare de tensiune plană, punctele caracteristice fiind determinate prin încercări standard (fig. 4.1).

Rezultatele stiințifice deosebite, obținute de fizica corpului solid, au creat posibilitatea abordării problemei ruperii corpurilor neomogene și fragile într-o lumină nouă și anume a *formării și dezvoltării treptate a microfisurilor*. Concluziile de bază ale acestor cercetări sînt următoarele:

1. Într-un corp solid solicitat la întindere, din cauza defectelor de structură apar microfisuri în formă de pană care au caracter reversibil (Griffith, A.) [19].

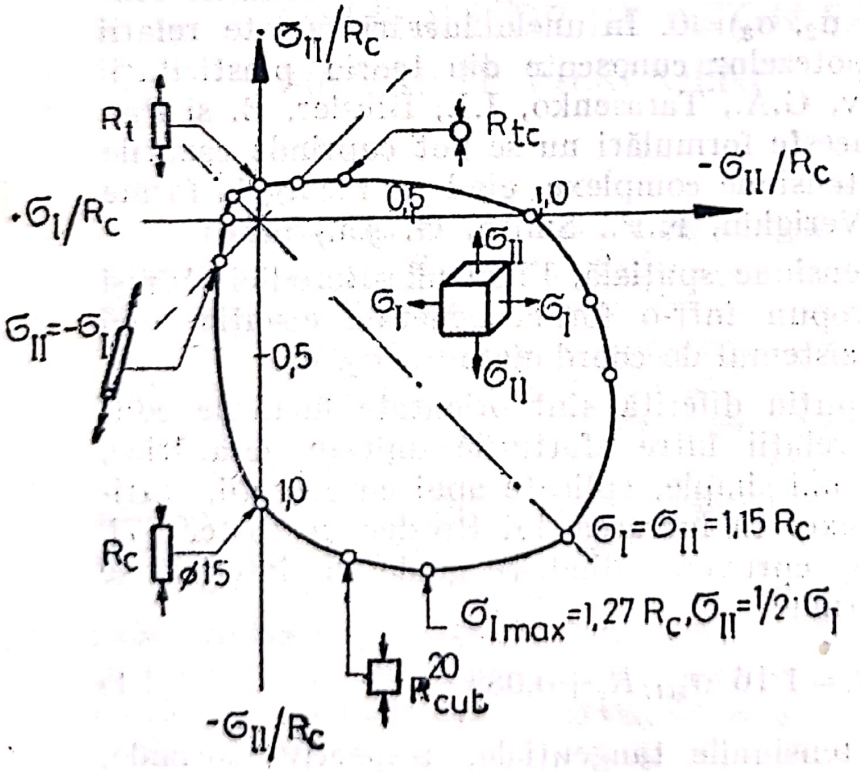


Fig. 4.1.

2. Datorită neomogenității structurii interne, cristaline, pentru fiecare valoare a eforturilor unitare corespunde o curbă de repartiție a microfisurilor de o anumită dimensiune (cea mai probabilă).

3. Atingerea limitei de rupere corespunde cu deschiderea uneia dintre microfisuri pe întreaga secțiune a epruvetei.

Sînt bine cunoscute teoriile și cercetările lui Griffith [19],

Scanned with OKEN Scanner

Irwin, G.R., Barenblatt, G., Zener, C., Price, R. [2, 24], în care s-a urmărit realizarea unei baze teoretice pentru analizarea rezistenței materialelor pe baza fenomenelor creșterii fisurilor și ale căror concluzii au o largă aplicare în studiul ruperilor fragile la metale și în proiectarea organelor de mașini. Un pas important înainte, mai ales în domeniul teoriei oboselii, s-a obținut prin aplicarea teoriei dislocațiilor, care permite o reprezentare fidelă a mecanismului deformării plastice în rețelele cristaline și teoria degradărilor cumulative (Cioclov, D.) [12].

Aplicarea teoriei formării și dezvoltării microfisurilor la beton roci sau alte materiale neomogene, la scară macroscopică, a fost justificată și de cercetările experimentale întreprinse de Bridgeman P., Gvozdeev, A.A., Berg, I.O. și Rüsch, H. [7, 8, 20, 37]. Astfel, Bridgeman a constatat creșterea volumului exterior al epriuvetelor de marmoră (fig. 4.2) de la o anumită treaptă de încărcare. Această creștere se explică prin compromiterea compactității corpului și apariția microruperilor. Rüsch și Jones au efectuat măsurători precise ale vitezei de propagare ale ultrasunetului, cînd după o creștere inițială, datorită compactării materialului corpului comprimat a urmat o scădere bruscă, odată cu apariția microfisurilor (fig. 4.2); s-au înregistrat, de asemenea, zgomote produse de microruperile interioare.

Pe baza rezultatelor experimentale privind caracterul *discret* al apariției microfisurilor, Gvozdeev a dat o fundamentare teoretică a cărei concluzie principală constă în faptul că neomogenitatea macrostructurală a betonului sau rocilor creează un cîmp *discontinuu* al rezistențelor locale; acest cîmp în interacțiune cu cîmpul tensiunilor datorat sarcinilor exterioare, care cresc continuu, determină concen-

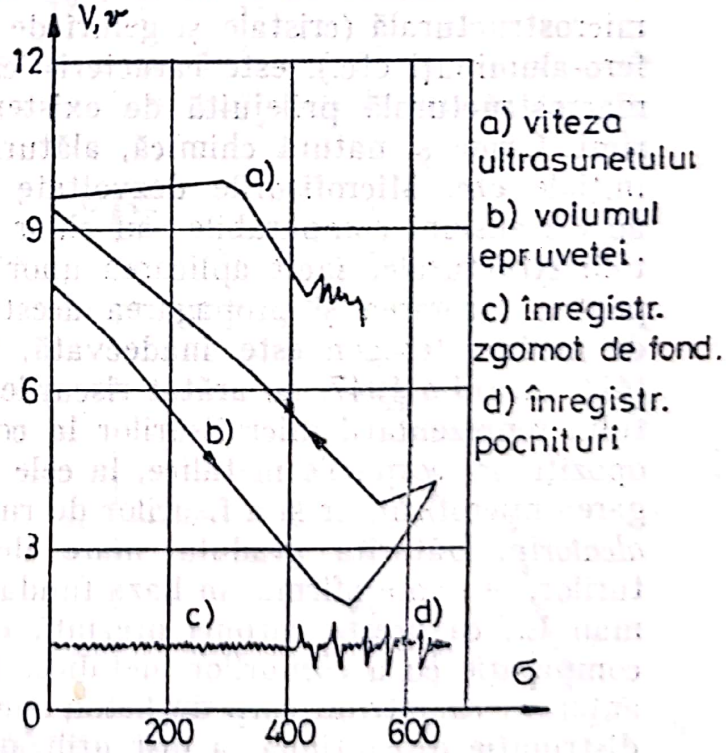


Fig. 4.2.

Scanned with OKEN Scanner

trări locale de tensiuni ce duc la formarea microfisurilor. Direcția cea mai probabilă a acestor microfisuri coincide cu direcția normală la cea a tensiunii respective. Caracterul discret, discontinuu, al cedărilor interioare ce produce ruperea, are o importanță capitală privind adoptarea unui model pentru studiul cedării corpurilor neomogene (beton, roci etc.).

Deși rezultatele și concluziile teoriei dislocațiilor, precum și a teoriilor propagării fisurilor (Griffith, Irwin) sau a echilibrului microfisurilor (FrenkelI., Barenblatt) [17] au o aplicabilitate totală la cercetarea ruperii fragile a metalelor, extinderea și aplicarea lor la beton, roci, materiale ceramice etc. este limitată și trebuie făcută cu mult discernămînt. Acest fapt se datorează diferenței esențiale între *macrostructura* acestor materiale și cea a metalelor sau a corpurilor cu rețea cristalină regulată. Astfel, metalele sînt corpuri omogene la scară macrostructurală, microfisurile fiind de dimensiuni mari în comparație cu detaliile microstructurale (cristale, micropori etc.). În acest sens, se poate admite ipoteza unui mediu omogen și continuu în care se plasează microfisurile de diferite forme (pană, eliptice), aplicîndu-se apoi ecuațiile mediului continuu (elastic sau elasto-plastic). Pentru beton, roci sau alte materiale similare ca structură, pe lîngă neomogenitatea la scară microstructurală (cristale și geluri de silicați, aluminați, feldspate, fero-aluminați etc.), este caracteristică și neomogenitatea la scară macrostructurală prilejuită de existența granulelor de diverse mărimi, forme și natură chimică, alături de pori macroscopici, fisuri inițiale etc. Microfisurile dezvoltate în urma solicitării corpului au dimensiuni comparabile sau chiar mai mici decît a acestor detalii structurale, încît aplicarea unor relații matematice, analitice pentru formarea și propagarea acestor microfisuri într-un astfel de mediu eterogen este inadecvată. Cercetările lui Rebinder P.A., [41] încă din 1947, au arătat riscurile și erorile extinderii conceptului reprezentării microfisurilor la corpurile solide nemetalice. În opoziție cu corpurile metalice, la cele din beton formarea și propagarea microfisurilor și a fisurilor de rupere are un caracter puternic *aleatoriu*. Datorită gradului mare de „dezordine" a macrostructurilor, se poate afirma, în baza fundamentării fizice date de Boltzman L., că aceste corpuri prezintă o *entropie* foarte ridicată în comparație cu a corpurilor metalice. Ideea fundamentală enunțată anterior, că într-un corp de beton sau rocă rezistențele locale au o distribuție discontinuă, a fost utilizată la crearea unor modele cu structură discretă (modelul lui Reinius, modelul lui Baker), precum

Scanned with OKEN Scanner

și la elaborarea de către Polak, A. a unei teorii de rupere pentru materiale poroase, [7, 35]. Pentru cazul betonului, eterogenitatea structurală crește pe măsură ce calitatea (marca) sa scade. Astfel, în figura 4.3 sînt indicate histogramele distribuției rezistențelor locale într-un beton de marcă joasă și respectiv de marcă superioară. Trebuie subliniat, că, denumirea de marcă „inferioară" și „superioară" trebuie înțeleasă numai în sensul alurei histograme. Astfel, o epruvetă de mortar de ciment de marca 200 fiind structural mai omogenă se va califica drept material omogen sau „beton superior", iar un beton de marca B 400 mai rezistent avînd o neomogenitate structurală mai mare va fi desemnat comparativ cu mortarul ca fiind de „marcă inferioară". Dacă se consideră că două corpuri din beton de calitate diferite au aceeași formă și dimensiune geometrică, respectiv același număr N de elemente structurale omogene, atunci corpul din beton de marcă inferioară va avea o dispersie mai mare a distribuției rezistențelor elementelor structurale locale, deci un număr „s" de ordonate în histogramă mai mare. Gradul de eterogenitate (dispersare) a ansamblului de elemente structurale, poate fi exprimat cantitativ prin funcția H a lui Boltzmann, L. :

$$H=\ln \frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_s!}. \tag{4.3}$$

Se constată că pentru s mai mare (condiția ca $N_1+N_2+\ldots+N_s=N$ valabilă în ambele cazuri), expresia lui H este mai mare.

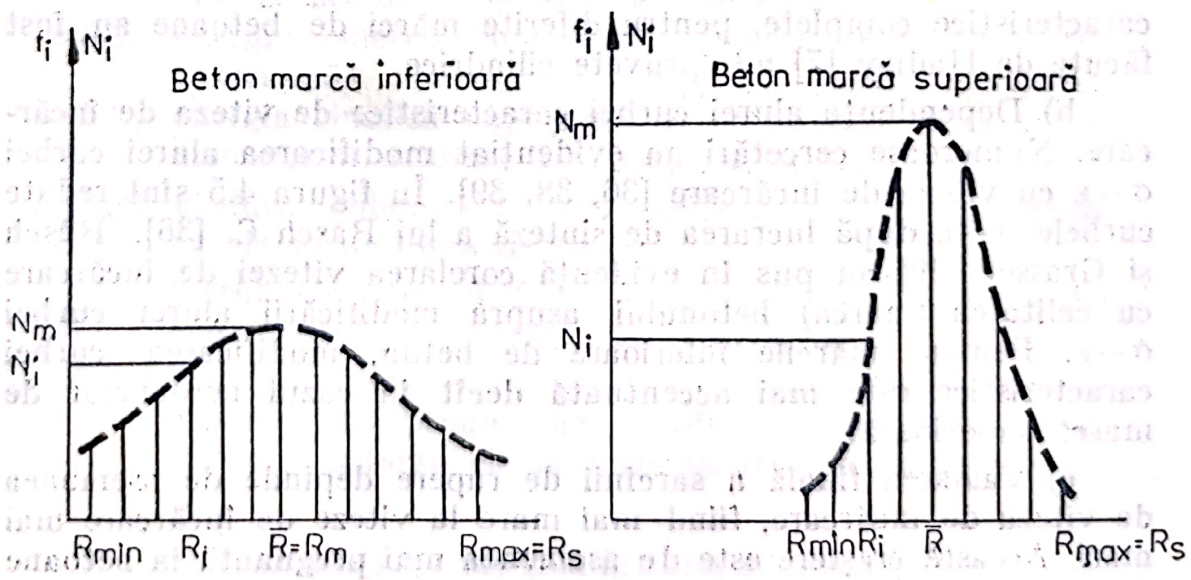


Fig. 4.3.

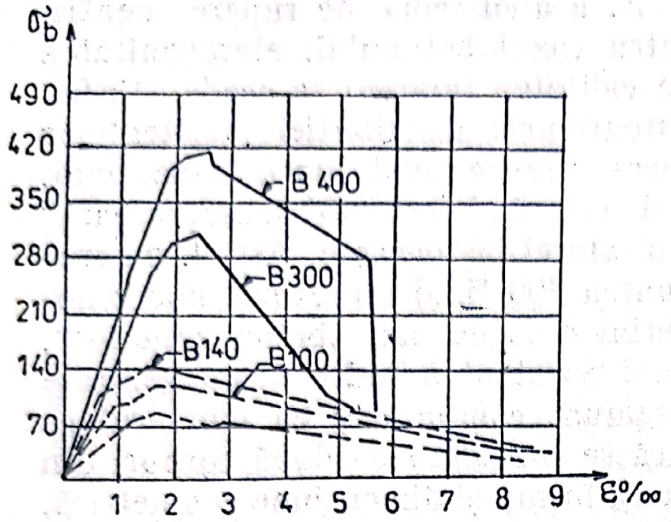


Fig. 4.4.

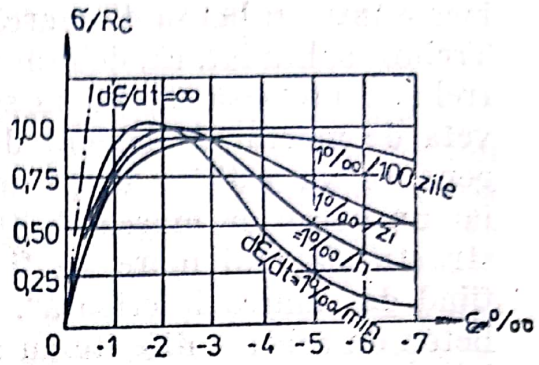


Fig. 4.5.

Acest fapt concordă bine cu realitatea, confirmată prin numeroase cercetări experimentale asupra *caracterului entropic* mai pronunţat al comportării sub încărcare, în apropierea ruperii, a betonului de marcă inferioară (Berg, Rüsch, Cowan, H.) [7, 29].

Principalele aspecte ale comportării betonului care evidenţiază mofidicarea structurii sale pe parcursul solicitării treptate sînt :

a) Existenţa pe curba caracteristică ridicată pe epruvetele de beton a unei ramuri descendente, cu atît mai extinse cu cît marca betonului este mai scăzută (fig. 4.4). Încercările, cu trasarea curbei caracteristice complete, pentru diferite mărci de betoane au fost făcute de Hadley [7] pe epruvete cilindrice.

b) Dependenţa alurei curbei caracteristice de viteza de încărcare. Numeroase cercetări au evidenţiat modificarea alurei curbei $\sigma-\varepsilon$ cu viteza de încărcare [36, 38, 39]. În figura 4.5 sînt redate curbele $\sigma-\varepsilon$ după lucrarea de sinteză a lui Rasch C. [36]. Rüsch şi Grasser [39] au pus în evidenţă corelarea vitezei de încărcare cu calitatea (marca) betonului asupra modificării alurei curbei $\sigma-\varepsilon$. Pentru mărcile inferioare de beton, modificarea curbei caracteristice este mai accentuată decît în cazul betoanelor de marcă superioară.

c) Valoarea finală a sarcinii de rupere depinde de asemenea de viteza de încărcare, fiind mai mare la viteze de încărcare mai mari. Această creştere este de asemenea mai pregnantă la betoane de marcă inferioară.

Scanned with OKEN Scanner

d) Energia de deformație absorbită, ca și cea disipată este corelată invers cu viteza de încărcare și cu calitatea betonului.

Încărcarea și deformarea unui corp de beton pînă la rupere constituie un *proces termodinamic și nu un fenomen mecanic*, deoarece pe timpul solicitării, prin apariția și dezvoltarea microfisurilor, a cedărilor locale în zone restrînse, bilanțul energetic se modifică continuu. Energia potențială de deformație, acumulată într-un element de structură sau porțiune finită care cedează este eliberată sub forma energiei cinetice, imprimînd întregului corp un impuls și căldură. Dacă încărcarea exterioară se presupune monoton crescătoare în timp, între două trepte de încărcare stabile, bilanțul energetic, conform principiului I al termodinamicii, este

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta E_c+\Delta E_c)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta W_i+\Delta W_i)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta U_i+\Delta Q_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta L_i+$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta L_i), \qquad (4.4)$$

unde s-a notat cu :

δW_i creșterea energiei interne (elastice) a corpului datorită creșterii încărcării exterioare ;

ΔW_i creșterea energiei interne, după cedarea elementelor prin redistribuția eforturilor între elementele structurale rămase valide ;

ΔU_i energia acumulată de la începutul încărcării corpului și eliberată de elementele care cedează ;

δE_c energia cinetică imprimată corpului prin solicitarea exterioară ;

ΔE_c energia cinetică imprimată corpului prin cedarea elementelor structurale ΔN_i (datorat lui ΔU_i) ;

ΔQ_i căldura eliberată în urma cedării elementelor structurale în unitatea de timp ;

δL_i lucrul mecanic al forțelor exterioare în deformarea elastică datorită creșterii încărcării ;

ΔL_i lucrul mecanic al forțelor exterioare în deplasarea suplimentară produsă de modificarea rigidității corpului prin cedarea elementelor structurale în număr de ΔN_i.

În ecuația (4.4) timpul t are semnificația succesiunii încărcării, măsurîndu-se din momentul solicitării. În virtutea celui de al doilea

Scanned with OKEN Scanner

principiu al termodinamicii, procesul termodinamic descris de ecuația (4.4) se produce într-un singur sens, *ireversibil*, condiționat de inegalitatea Clausius-Duhem :

$$\frac{d}{dt} S - \frac{1}{T} - Q \geqslant 0, \tag{4.5}$$

unde $S=\lambda+\mu W$ este entropia sistemului, λ o constantă proporțională cu valoarea funcției H, definită prin (4.3) și μ o constantă invers proporțională cu temperatura absolută T.

Pe măsura încărcării corpului, structura sa se modifică, prin dezvoltarea microfisurilor și cedarea elementelor structurale. Acest fapt conduce pe de o parte la creșterea entropiei S, adică $\Delta S>0$, iar pe de altă parte la disiparea energiei eliberate ΔU_i, sub forma energiei cinetice și calorice. În continuare se va utiliza expresia *energiei libere*, notată cu ψ, care exprimă capacitatea sistemului termodinamic de a converti energia disponibilă, condiționînd astfel procesele reversibile prin relația :

$$\psi=W-TS. \tag{4.6}$$

Introducînd (4.6) în (4.4) și ținînd cont de (4.5) se obține ecuația de bilanț a energiei sub forma :

$$\frac{d}{dt}(\delta E_c+\Delta E_c+\delta W+\Delta\psi+T\cdot\Delta S-\Delta U)+\dot{T}\cdot\Delta S+$$

$$+\Delta Q=\frac{d}{dt}(\delta L+\Delta L). \tag{4.7}$$

În ecuația (4.4), respectiv (4.7) prin Δ s-a notat variația mărimilor ca urmare a cedării unor elemente structurale sub încărcarea exterioară constantă, iar cu δ s-a notat variația aceloraşi mărimi datorită creşterii (variației) încărcării exterioare pentru structura nemodificată (fără cedarea unor elemente structurale). În acest fel, se poate considera că în succesiune cronologică, solicitarea în trepte de încărcare între două stări stabile, adică în echilibru termodinamic se va desfășura astfel : creșterea încărcării exterioare δP va determina creșterea deformației corpului δf, a energiei interne δW și a energiei δE_c, ca pentru un corp elastic. În faza a doua, în urma cîmpului de tensiune creat, vor ceda un număr ΔN de elemente structurale (sau se vor forma microfisuri) ; din această cauză, structura corpului se modifică, eforturile unitare se redistribuie rezultînd o creștere Δf a deformațiilor, a energiei interne ΔW_i, a energiei

Scanned with OKEN Scanner

cinetice ΔE_c, precum și eliberarea energiei potențiale elastice ΔU_i acumulată în elemente cedate respective. Se observă că prima fază este din punct de vedere termodinamic izentropică, $\Delta S=0$, fiind un proces mecanic (elastic). În faza a doua, cînd $\delta P=0$, sistemul este termodinamic izolat și în cazul general $\Delta S\neq 0$. Pentru variațiile lucrului mecanic exterior δL_i și ΔL_i se vor utiliza expresiile

$$\delta L_i=\{P_i\}^T\{\delta f\}+1/2\{\delta P_i\}^T\{\delta f\}$$
$$\Delta L_i=\{P_i+\delta P_i\}^T\{\Delta f\}, \qquad (4.8\ a, b)$$

unde: $\{P_i\}$, $\{\delta P_i\}$ — sînt vectorii încărcării respective treptei de încărcare exterioară;

$\{\delta f\}$ — este vectorul deplasărilor punctelor de aplicație ale lui $\{P\}$ datorită lui $\{\delta P\}$;

$\{\Delta f\}$ — este vectorul deplasărilor punctelor de aplicație ale lui $\{P\}$ datorită cedării elementelor ΔN_i.

Prin derivarea expresiilor (4.8 a, b) în raport cu timpul și ținînd cont de legea conservării impulsului se obțin relațiile:

a) În prima fază:

$$\frac{d}{dt}(\delta W+T\cdot\Delta S)=\{\dot{P}_i\}^T\cdot\{\delta f\}+1/2\ \{\delta\dot{P}_i\}^T\{\delta f\} \qquad (4.9)$$

sau, deoarece $\Delta S_i=0$, se regăsește relația fundamentală din mecanica mediului continuu.

$$\delta\pi_i=\delta W_i-\delta L_i=0. \qquad (4.10)$$

b) În faza a doua, încărcarea exterioară rămîne constantă, $\delta P=0$.

$$\frac{d}{dt}(\Delta E_c+\Delta\psi+T\cdot\Delta S-\Delta U)+\dot{T}\cdot\Delta S=\frac{d}{dt}\Delta L-\Delta Q. \qquad (4.11)$$

Energia elestică acumulată în elementele structurale care cedează se regăsește sub forma energiei cinetice ΔE_c, imprimată corpului sub formă de impuls și energia disipată (calorică) ΔQ pentru învingerea rezistenței materialului:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}=\frac{\Delta E_c}{\Delta t}+\Delta Q. \qquad (4.12)$$

În procesul dezvoltării microfisurilor sau al cedărilor interioare, termenii ΔU, ΔL și ΔS cresc, pe măsura creșterii numărului de cedări, în mod accelerat.

Energia potențială elastică ΔW crește ca urmare a creșterii stării de tensiune în porțiunea validă a corpului. Creșterea energiei potențiale ΔW este însă limitată prin reducerea volumului părții valide. În acest fel se ajunge la un moment critic cînd creșterea energiei potențiale ΔW nu poate suplini creșterea lui ΔL și ΔU, egalitățile (4.11) și (4.12) nu mai pot fi satisfăcute. Această „divergență" a bilanțului termodinamic este pusă în evidență prin creșterea rapidă a energiei cinetice ΔE_c. Astfel, cedarea corpului prin *divergența echilibrului* se va determina prin condiția :

$$\frac{d}{dt}(\Delta E_c) = \frac{d}{dt}(\Delta L + \Delta U) - \frac{d}{dt}(\Delta W) - \Delta Q \geqslant 0. \qquad (4.13)$$

Din examinarea relației (4.11) rezultă că în cazul încărcărilor statice, temperatura absolută influențează în același sens ca și mărimea entropiei sistemului. Astfel, valorile scăzute ale lui T reduc termenul $T \cdot \Delta S$, diminuînd astfel caracterul entropic al ruperii, manifestîndu-se „fragilitatea la rece". Încărcarea statică ideală corespunde din punct de vedere termodinamic unui *proces izoterm*, energia calorică dezvoltată în urma ruperilor interne este disipată în exterior. Redistribuția eforturilor unitare, în urma cedărilor este integrală. Pentru încărcări dinamice cu viteze mari, procesul termodinamic devine *politrop*, iar la limita unei viteze de încărcare infinite (încărcare de șoc), procesul devine *adiabatic* $\Delta Q = \Delta S = 0$; ca urmare, redistribuția eforturilor unitare în porțiunea validă a corpului este nulă, $\Delta W = 0$, astfel că relația (4.13) este satisfăcută de la început ; cedarea în acest caz apare în momentul formării mecanismului, ca urmare a cedărilor succesive, cînd întreaga energie acumulată, $\Sigma \Delta W$, este eliberată sub formă de energie cinetică, numită în continuare *energie cinetică de colaps*, E_{col} . Valoarea energiei cinetice de colaps în raport cu energia totală acumulată, respectiv lucrul mecanic al forțelor exterioare, caracterizează modul de rupere *casant* sau *ductil*. În figura 4.6 sînt trasate dia gramele $P-f$ pentru patru cazuri de comportare. Curba „4"

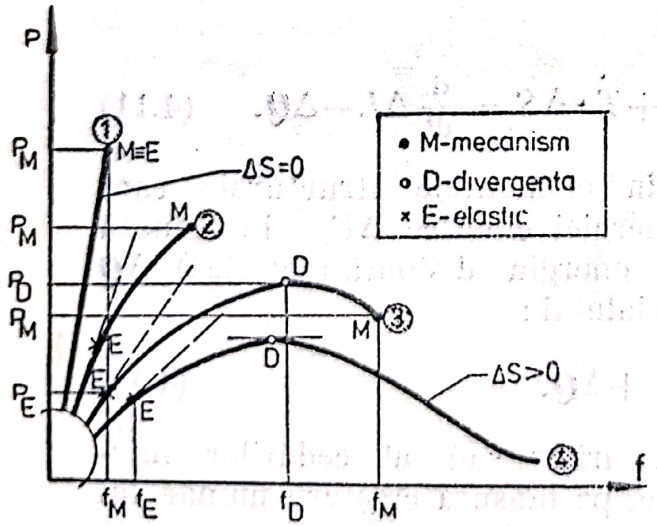


Fig. 4.6.

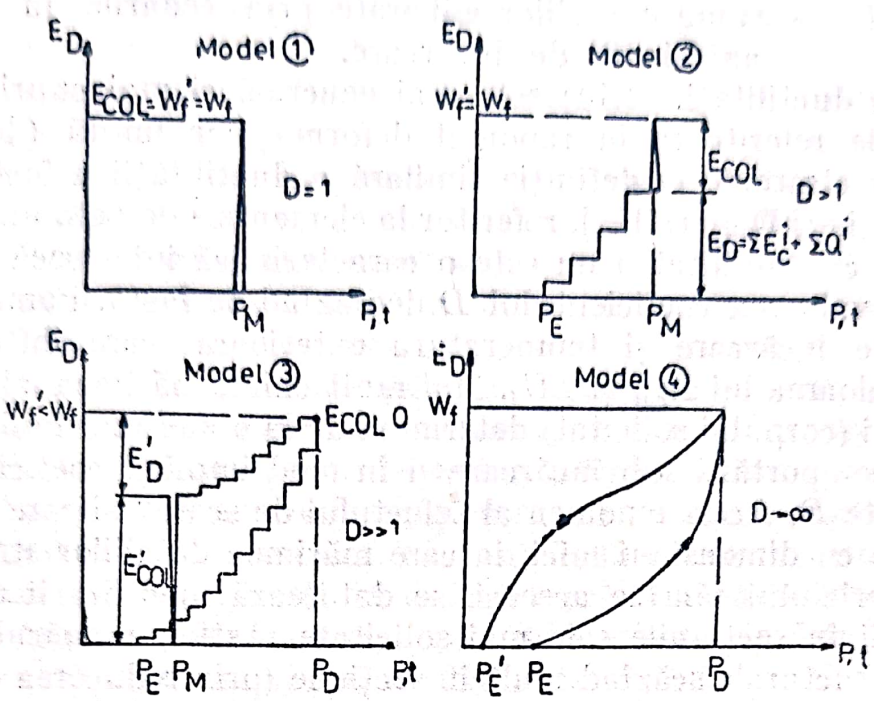


Fig. 4.7.

este caracteristică unei comportări entropice izoterme, $\Delta S>0$, pentru care ramura descendentă a curbei $P—f$ este dezvoltată. Această curbă este specifică pentru betonul solicitat la compresiune statică și temperatură normală.

Curba „3" este caracteristică unui material mai omogen sau încărcat mai rapid, la care se distinge o porțiune descendentă pe curba $P—f$, cedarea producîndu-se prin formarea de mecanism în structura internă după trecerea prin punctul de „divergență" al echilibrului energetic. Curbele „2" și „1" sînt caracteristice comportării izentropice, curba „1" fiind caracteristică materialelor omogene încărcate foarte rapid sau la temperatura absolută minimă.

În figura 4.7 sînt redate variațiile energiei cinetice E_{col} pentru patru cazuri de comportare. Cu aceste considerente, coeficientul de ductilitate al cedării se definește prin raportul

$$D=\frac{L_e}{E_{col}}=\frac{L_e}{L_e-\Sigma\, U_i}, \tag{4.14}$$

unde s-a notat:

D — coeficientul de ductilitate;

L_e — lucrul mecanic acumulat (evaluat prin aria cuprinsă între curba $P—f$ și axa Of);

ΣU_i — suma energiilor eliberate prin cedările în treptele anterioare de încărcare.

Definiția ductilității (4.14) este mai generală și mai cuprinzătoare decît cele referitoare la raportul deformațiilor limită (de rupere respectiv elastice). O definiție similară a ductilității a fost expusă de Cișmigiu și Dogaru [13], referitor la elementele de beton armat. Se constată că ductilitatea nu este o caracteristică intrinsecă a materialului, valoarea coeficientului D depinzînd de factorii ambientali: viteză de încărcare și temperatura exterioară, care influențează direct valoarea lui E_{col} și ΣU_i. Mai mult chiar, mărimea absolută a epruvetei (corpului solicitat) determină de la o anumită limită modificarea comportării sub încărcare și în mod implicit coeficientul de ductilitate D. Acest fenomen al „efectului de scară" și care apare la epruvete cu dimensiuni mici, la care mărimea detaliilor structurale ale materialului rămîne aceeași, se datorează modificării entropiei structurii în secțiunile sale mai solicitate. Astfel, numărul de elemente structurale scăzînd mult în secțiune (prin reducerea dimensiunilor), distribuția inițială (de volum) a rezistențelor locale se modifică, histograme din fig. 4.3 se trunchiază, numărul „H" din relația (4.3) scade, scăzînd și valoarea entropiei S. Aceste epruvete manifestă o comportare mai casantă, cu valori finale de rupere mai mari [1, 7, 38]. De asemenea, pentru epruvetele ce se încearcă în laborator, ductilitatea, ca de altfel și alura curbei $\sigma-\varepsilon$ pe porțiunea curbă, depind și de caracteristicile elastice ale mașinii de încercat. Epruveta va avea o rupere mai casantă (D e mic), cu cît cadrul mașinii de încercat este mai elastic.

4.2. SIMULAREA CU AJUTORUL ELEMENTELOR FINITE A PROCESULUI DE CEDARE A UNEI STRUCTURI

Caracterul discret al distribuției rezistențelor locale într-un corp de beton sau alt material neomogen (rocă etc.), precum și dezvoltarea microfisurilor și a cedărilor locale ca un proces discontinuu sugerează utilizarea modelului cu elemente finite pentru *simula-*

Scanned with OKEN Scanner

rea unui astfel de proces. Pentru ca modelarea cu ajutorul elementelor finite să fie corectă și cît mai apropiată de situația reală este necesar ca discretizarea utilizată să corespundă cît mai fidel distribuției reale a componentelor structurale din corpul respectiv. Acest fapt reclamă ca dimensiunile elementelor finite să fie suficient de mici în raport cu secțiunea corpului (structurii) respectiv și corelate cu dimensiunile maxime ale componentelor structurale (granule, agregate etc.). Problema nu are o rezolvare generală, ci trebuie analizată în fiecare caz în parte. Spre exemplu, modelul unei epruvete de beton cu secțiune de 20×20 cm și agregat maxim 30 mm va trebui să cuprindă elemente finite avînd dimensiune maximă de cca 1,0 cm, pentru a putea modela interspațiul dintre granule. La cealaltă extremitate, pentru un baraj cu grosimea minimă de 2,00 m la coronament, elementele finite vor avea o dimensiune de maximum 20 cm (1/10 din grosime) în această zonă. Îndesirea pronunțată a rețelei de elemente finite este limitată de posibilitățile calculatorului, implicînd creșterea rapidă a timpului de rulare (vezi paragraful 1.8). Deoarece rețeaua de elemente finite este mai grosieră decît structura reală a corpului prototipului și valoarea relativă a entropiei modelului va fi mai mică, prin modelarea cu elemente finite, comportarea obținută prin calcul (curba $\sigma - \varepsilon$ valoarea încărcării limită, coeficientul de ductilitate) este mai puțin entropică și mai casantă decît cea reală.

Trebuie menționat faptul că pentru structurile de beton s-au elaborat programe de simulare a ruperii [32, 47], bazate pe metodele elasto-plastice aplicabile mediilor continue, ca : metoda deformațiilor inițiale (Gallagher, Argyris) [32], metoda „elasticității variabile" (Marcal și King, Yamada, Yoshimura și Sakurai) [31, 46], metoda elasticității incrementale modificată și altele [47]. Astfel, Chen, A.C. a elaborat un program EPFFEP (Elastic-Plastic-Fracture-Finite-Element-Program), în care calculul se urmărește pas cu pas, modificînd matricea de rigiditate funcție de o condiție de curgere impusă de starea de efort din elementul finit respectiv [10]. Această metodă, aplicabilă corect corpurilor metalice este mai puțin potrivită pentru beton, din motivele arătate în paragraful precedent. Într-o altă modalitate de abordare, Rashid, Y. [37] propune o metodă și program de calcul pas cu pas, simulînd însă procesul discontinuu de evoluție al tensiunilor și deformațiilor prin „degenerarea" elementelor finite. Acest procedeu de calcul, mai apropiat de natura fizică a betonului, a fost aplicată la studiul și proiectarea conteinerelor din beton precomprimat pentru centrale nuclearo-

Scanned with OKEN Scanner

electrice [37], procedeul fiind impus de necesitatea realizării unei construcţii cu grad ridicat de siguranţă în exploatare. În cele de mai jos se prezintă pe scurt aspectele mai importante ale procedeului.

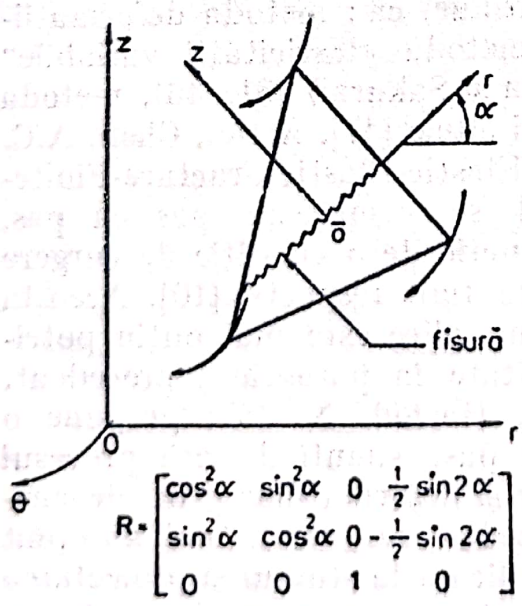
Astfel, dacă se consideră un element finit toroidal cu secţiune triunghiulară, fisurat în planul $r-z$, noile direcţii $\bar{r}$ şi $\bar{z}$ (în lungul, respectiv normal fisurii) devin direcţii principale, iar elementul finit devine ortotrop (după axele $\bar{r}$, $\bar{z}$ şi θ), (fig. 4.8). Din momentul fisurării se condideră că elementul finit îşi anulează rigiditatea după axa $\bar{z}$, adică coeficientii corespunzători din matricea de elasticitate D se anulează, adică elementul finit „degenerează". Referindu-ne la figura 4.8, matricea de elasticitate a elementului finit în sistemul de coordonate general $rz\theta$ se va exprima în funcţie de matricea de rigiditate în sistemul local $\bar{r}$, $\bar{z}$, θ prin matricea de transformare de rotaţie R

$$D=R^T\cdot\bar{D}\cdot R. \tag{4.15}$$

În continuare se introduc *funcţiile de distribuţie* $g(t)$ şi $e(t)$ (fig, 4.9), definite prin :

$$e(t)=\theta(t-t_i)$$
$$g(t)=\theta(t)-e(t),\ i=1,2,3. \tag{4.16 a,b}$$

Aceste funcţii s-au introdus cu scopul de a marca „biografia" elementului finit respectiv. Timpul t (argumentul acestor funcţii) care măsoară nivelul de solicitare exterioară, este proporţional cu



$$R=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 0 & \frac{1}{2}\sin 2\alpha\\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 0 & -\frac{1}{2}\sin 2\alpha\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Fig. 4.8.

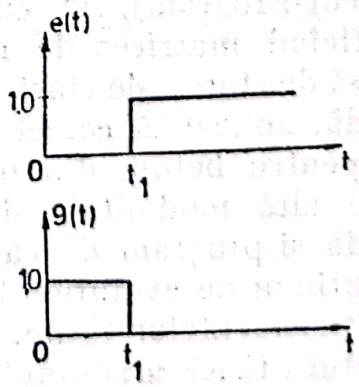


Fig. 4.9.

intensitatea forțelor exterioare, pentru cazul încărcării statice (monotone). Timpii t_1 t_2, t_3 marchează momentele la care se formează fisurile, în trei plane distincte, pentru elementul respectiv (trei grade de „degenerare"). În relațiile 4.16, $\theta(t)$ este *funcția treaptă a lui Heavside* [$\theta(t)=1$ pentru $t>0$; $\theta(t)=0$ pentru $t<0$]. Pentru $g(t)=1$, elementul finit este continuu, iar pentru $g(t)=0$ este fisurat. În sistemul de coordonate local $\bar{r}\bar{z}\theta$, coeficienții $\bar{d}_{i,j}$ ai matricei de elasticitate ortotrope $\bar{D}$ vor fi

$$\bar{d}_{ii}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\theta(t)-e_i(t)\cdot e_i(t)] \qquad (4.17\ \text{a, b})$$

$$\bar{d}_{ij}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\theta(t)-e_i(t)\cdot e_j(t)],\ (i\neq j),$$

unde : $e_1(t)$, $e_2(t)$ și $e_3(t)$ sînt funcții independente conform (4.16) ;
E și ν sînt modulul de elasticitate, respectiv coeficientul lui Poisson.

Regrupînd termenii (4.17), pentru matricea $\bar{D}(t)$ se obține relația

$$\bar{D}(t)=\bar{D}(0)\cdot\theta(t)-H(t)\cdot\bar{D}(0)\cdot H(t), \qquad (4.18)$$

unde :

$$\bar{D}(0)=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu\\ \nu & 1-\nu & \nu\\ \nu & \nu & 1-\nu\end{bmatrix} \qquad (4.19\ \text{a, b})$$

$$H(t)=\begin{bmatrix}e_1(t) & 0 & 0\\ 0 & e_2(t) & 0\\ 0 & 0 & e_3(t)\end{bmatrix}.$$

Creșterea incrementală a efortului unitar $\bar{\sigma}$ este :

$$d\bar{\sigma}=D(t)\cdot d\bar{\varepsilon}, \qquad (4.20)$$

de unde

$$\bar{\sigma}=\int_0^t \bar{D}(\tau)\cdot\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\cdot d\tau. \qquad (4.21)$$

Datorită faptului că degenerarea elementului finit constituie un proces discontinuu în raport cu cresterea încărcării exterioare, care este un proces continuu, variația lui $\bar{\sigma}$ trebuie să reflecte am-

Scanned with OKEN Scanner

bele aspecte. În acest sens, se introduce variabile timp τ discontinuă și independentă de t, care are semnificație numai pentru momentele discrete t_1, t_2, t_3. Din acest motiv, matricea de elasticitate ortotropă D se va exprima în funcție de cele două variabile. Astfel, pentru $0<\tau\leqslant t$ și ținînd cont de (4.15), matricea D va fi :

$$D\,(t,\tau)=R\,(t)^T\cdot\bar{D}\,(\tau)\cdot R\,(t). \tag{4.22}$$

Introducînd relația (4.18) în (4.22) se obține

$$D\,(t,\tau)=D\,(0)\cdot\theta\,(t)-N\,(t,\tau), \tag{4.23}$$

unde : $D\,(0)$ este matricea de elasticitate izotorpă în sistemul de coordonate generale r, z, θ ;

$N\,(t,\tau)$ este o matrice de rigiditate „modificantă", a cărei expresie este

$$N\,(t,\tau)=R\,(t)^T\cdot H\,(\tau)\cdot D\,(0)\cdot H\,(\tau)\cdot R\,(t). \tag{4.24}$$

Introducînd (4.22) în (4.21), se obține expresia tensiunii $\sigma\,(t)$

$$\sigma\,(t)=D_0\cdot\varepsilon\,(t)-\int_0^t N\,(t,\tau)\cdot\frac{d\varepsilon\,(\tau)}{d\tau}\cdot d\tau. \tag{4.25}$$

Efectuînd integrarea prin părți și aplicînd regula de derivare a distribuțiilor :

$$\frac{N(t,\tau)}{d\tau}=\sum_{i=1}^{3}N\,(t,t_i)\cdot\delta\,(t-t_i), \tag{4.26}$$

unde : $\delta\,(t-t_i)$ este funcția delta a lui Dirac, se obține în final

$$\sigma\,(t)=[D_0-N\,(t,t)]\cdot\varepsilon\,(t)+\sum_{i=1}^{3}N\,(t_i,t_i)\cdot\varepsilon\,(t_i). \tag{4.27}$$

Pentru a se obține expresia matricei de rigiditate a elementului finit, se va exprima ecuația de echilibru a elementului finit (1.27)

$$\{F\,(t)\}^e=[k]^e\cdot\{u\,(t)\}, \tag{4.28}$$

unde : $\{F\,(t)\}$ este vectorul forțelor din nodurile elementului finit ;

$\{u\,(t)\}$ este vectorul deplasărilor acestor noduri.

Introducînd relațiile (4.15), (4.18) și (4.24) în expresia generală a rigidității $[k]^e$, definită prin (1.24) se obține

$$\{F\,(t)\}=[K_D-K_N\,(t,t)]\cdot\{u\,(t)\}-\sum_{i=1}^{3}K_N\,(t_i,t_i)\}\cdot\{u\,(t_i)\}, \tag{4.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-a notat :

K_D — matricea de rigiditate elastică a elementului finit, definită în capitolul 1 prin (1.24) ;

$K_N(t,t)$ — marticea de rigiditate „modificantă" și are expresia,

$$K_N(t,t)=\int_V B^T \cdot N(t,t) \cdot B \cdot dv. \tag{4.30}$$

Matricele K_D și K_N se asamblează în structura generală în modul indicat în capitolul 1 paragraful 1.8. Calculul se conduce pas cu pas, astfel :

1. Se determină inițial pentru $t<t_1$ deplasările și tensiunile corespunzătoare stadiului elastic ($N(t,t)=K_N(t,t)=0$).

2. Cu valorile tensiunilor se testează condiția de cedare a elementului finit, iar în cazul cînd aceasta survine, se recalculează tensiunile cu relația (4.27) și se determină expresia $K_{N,N}(t,t)$.

3. Se reasamblează matricea structurii și se recalculează deplasările și tensiunile.

2. Se reiau operațiile de la pct. 2 și 3 pînă cînd se obține o stare stabilă, fără elemente noi cedate ; apoi se majorează treapta de încărcare și se reiau operațiile de la punctul 3. Treptele de încărcare se succed pînă la atingerea încărcării totale de valoare determinată „a priori". În felul acesta se obține curba $\sigma-\varepsilon$ sau $P-f$ fără a se evidenția maximul curbei și nici ramura descendentă. Figura 4.10 ilustrează, ca exemplu, secțiunea vertical-axială printr-un conteiner din beton precomprimat pentru o centrală nuclearo-electrică solicitată la presiune interioară crescătoare pînă la 13,8 daN/cm^2. Structura conteinerului este supusă și la un cîmp termic staționar cu izoterme, variind între 27° C la exterior și 63° C la fața interioară. În figura 4.11 este arătată distribuția fisurilor pentru două valori ale presiunii interioare : 117 daN/cm^2, respectiv 138 daN/cm^2. Se constată că această creștere de 21 daN/cm^2 a presiunii a produs o degradare avansată a structurii, fiind astfel în apropierea nivelului de colaps. După cum se observă, în acest procedeu structura s-a considerat omogenă, ceea ce conduce pe de o parte la o apreciere superioară, în detrimentul siguranței, a încărcării ultime, iar pe de altă parte la o comportare mai rigidă a structurii, conform celor expuse în paragraful 4.1. Deoarece modelul de calcul al structurii este un ansamblu finit de elemente finite conectate între ele, pe măsură ce acestea cedează, sistemul își reduce numărul de legături, astfel că la un anumit nivel de încărcare devine mecanism, nemaiputînd prelua încărcări. În această situație struc-

Scanned with OKEN Scanner

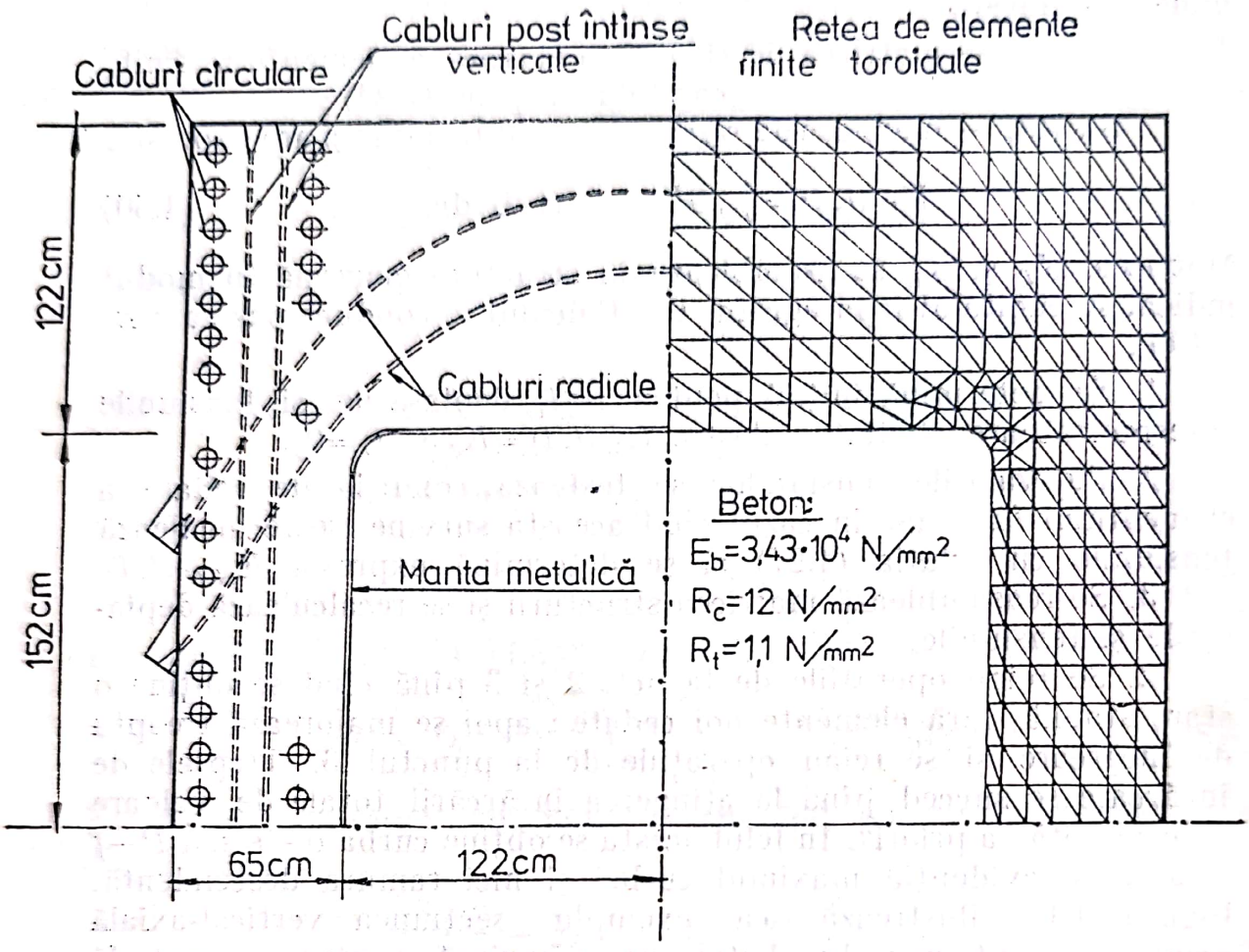


Fig. 4.10.

tura reală eliberează energia potențială elastică acumulată sub forma energiei cinetice, adică are loc o rupere casantă. Din punct de vedere matematic, acest lucru corespunde situației cînd matricea de rigiditate a structurii, care e și matricea coeficienților ecuațiilor sistemului devine singulară, respectiv sistemul de ecuații devine incompatibil. Pentru testarea bunei condiționări a matricei coeficienților unui sistem de ecuații se face apel la teorema fundamentală din teoria ecuațiilor lineare : *Un sistem de ecuații lineare este compatibil, adică admite soluții, numai dacă matricea coeficienților și matricea extinsă sînt de același rang.* Pentru sistemul de ecuații :

$$A\ \{x\}=B\ (y), \tag{4.31}$$

unde A, B, $\{y\}$ sînt matrici, respectiv vectori cunoscuți, iar $\{x\}$ este vectorul necunoscut, se definește ca matrice extinsă matricea obți-

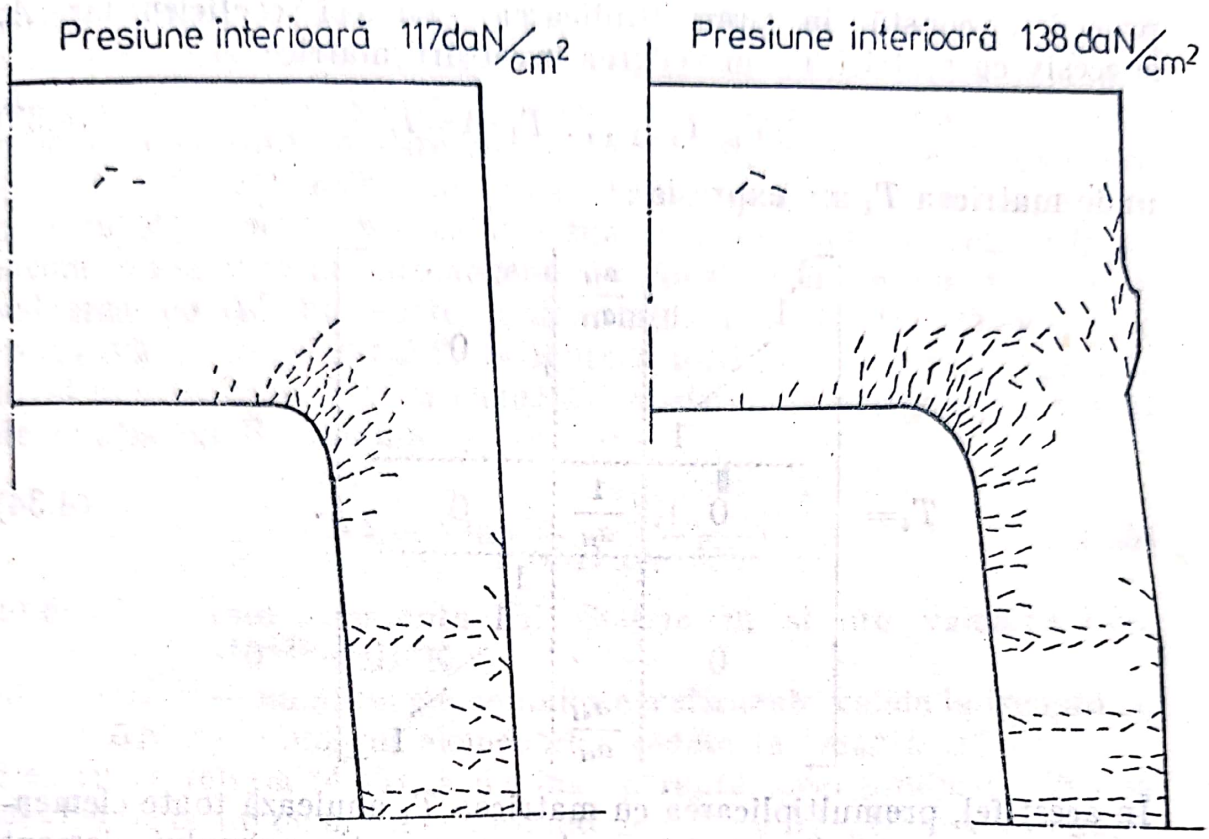


Fig. 4.11.

nută prin completarea coloanelor matricei A cu coloanele matricei B, astfel:

$$C=[A|-B]. \tag{4.32}$$

Rangul matricei se definește ca fiind ordinul celei mai mari matrice pătrate cu determinant nenul. Pentru verificarea rangurilor celor două matrice A și C, se utilizează procedeul Jordan [47]. Acest procedeu testează compatibilitatea sistemului de ecuații care depinde de corelația între matricea coeficienților A și matricea B, aceasta din urmă fiind în cele mai multe cazuri o matrice unitară. Prin aceasta este posibil ca sistemul de ecuații să fie compatibil pentru un anumit vector al forțelor exterioare, deși structura în cazul general este un mecanism. Spre exemplu, o grindă dreaptă cu o deschidere, devenită la un moment dat rezemată pe două reazeme mobile, constituie un sistem compatibil pentru încărcări având direcția paralelă cu pendulii reazemelor.

O condție mai acoperitoare pentru testarea formării mecanismului o constituie procedeul de eliminare Gauss-Jordan [32]. Acest

Scanned with OKEN Scanner

procedeu constă în premultiplicarea matricei coeficienților A, succesiv cu matrici T_i, în vederea inversării matricei A

$$T_n \cdot T_{n-1} \ldots T_1 \cdot A = I, \tag{4.33}$$

unde matricea T_i are expresia :

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \frac{a_{1i}}{a_{ii}} & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & \frac{1}{a_{ii}} & 0 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \frac{a_{ni}}{a_{ii}} & & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

În acest fel, premultiplicarea cu matricea T_1 anulează toate elementele coloanei „1" din matricea A, cu excepția primului element a_{11} care devine egal cu unitatea. Matricea T_2 va anula în matricea obișnuită anterior T_1A toate elementele de pe coloana a doua, cu excepția elementului a_{22} care devine egal cu unitatea. În acest mod se procedează cu toate coloanele. Procedeul de calcul este eficient prin utilizarea metodei de alegere a pivotului conform celor arătate în capitolul 1, paragraful 1.8. Dacă în final în matricea obținută există o linie care are toate elementele nule sau foarte mici, sistemul este incompatibil, respectiv rău condiționat, ceea ce exprimă formarea unui mecanism perfect respectiv un cvasi-mecanism și calculul trebuie oprit. La cele mai multe structuri însă, așa cum s-a arătat în paragraful precedent, cedarea survine prin divergența echilibrului, înainte de formarea mecanismului. Acest caz corespunde elementelor de construcție având o ductilitate obișnuită sau ridicată (armare suficientă, fretare sau alte măsuri de împiedicare sau limitare a deformațiilor de întindere în beton). Pentru elementele finite componente ale structurii, se admite că sînt ideal elastice pînă la cedarea lor inclusiv, neavînd o comportare de tip plastic nici după cedare, aceasta din urmă considerîndu-se ca fiind casantă. În această ipoteză, nu este posibil de a stabili un criteriu de divergență a echilibrului pe baza relației de bilanț energetic exprimat în

Scanned with OKEN Scanner

forma (4.10) sau (4.13), adică în cadrul strict al mecanicii corpului solid elastic. Relația (4.12), care exprimă echilibrul termodinamic al procesului de încărcare și cedare a structurii, poate fi utilizată numai în măsura în care se poate evalua variația entropiei ΔS. Aceasta este legată de cantitatea de căldură generată și disipată în procesul de rupere. În stadiul actual al cunoașterii structurii fizice intime a materialelor neomogene de construcții (beton, roci etc.), valoarea lui ΔS nu poate fi determinată cantitativ. O apreciere calitativă a valorii lui ΔS, în ipoteza unei structuri neomogene la nivel macroscopic, dar cu elemente constituente omogene, este dată de relația lui Boltzmann

$$\Delta S_i = k \ln\left[\frac{N_i!}{\Delta N_i!\,(N_i-\Delta N_i!)}\right], \tag{4.35}$$

unde : k este constanta lui Boltzmann și are valoarea $1{,}38 \cdot 10^{-16}$ ergi/ °K ;

N_i — numărul elementelor constituente valide la treapta „i;

ΔN_i — numărul elementelor cedate la treapta „*i*".

Pentru ca relația (4.35) să devină operantă, deci produsul $T\Delta S$ să devină de ordin de mărime apropiat de ΔW_i și ΔL_i, trebuie ca numărul N_i să fie un număr foarte mare, de ordin $10^5 \ldots 10^6$, ceea ce depășește cu mult capacitatea calculatoarelor actuale. În ceea ce privește fenomenul fizic al cedării prin divergență, acesta este pus în evidență prin procesul de accelerare a cedărilor la o treaptă de încărcare constantă. Cedările succesive sînt cauzate de creșterea tensiunilor prin redistribuție, în urma cedărilor anterioare. Din această observație se poate enunța *criteriul energetic* al cedării prin divergența echilibrului astfel : *Structura alcătuită din elemente componente ideal-elastice, ajunge la limita echilibrului stabil, dacă pentru o creștere finită dar suficient de mică, rata cedărilor în subtreptele de distribuție crește.* Prin rata cedărilor se definește raportul : $\Delta N_j^i / N_{j-1}^i$ sau, mai adecvat, raportul $\Delta U_j^i / W_j^i$, unde ΔN_j^i și N_j^i este numărul de elemente cedate în subtreapta de redistribuție j, respectiv numărul de elemente valide, iar ΔU_j^i și W_{j-1}^i reprezintă energia eliberată de elementele cedate, respectiv energia de deformație în subtreapta anterioară, i fiind numărul treptei de încărcare. În acest fel, criteriul de cedare prin divergență devine :

$$\frac{\Delta N_j^i}{N_{j-1}^i} < \frac{\Delta N_{j+1}^i}{N_j^i} \quad \text{sau} \quad \frac{\Delta U_j^i}{W_{j-1}^i} < \frac{\Delta U_{j+1}^i}{W_j^i}, \tag{4.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

În modul formulat mai sus, acest criteriu necesită unele observații:

a) Cedarea accelerată sau frînată a elementelor structurale este condiționată de interacțiunea stării de tensiune în elementele respective, cu rezistențele locale respective. Cu alte cuvinte, divergența echilibrului este condiționată nu numai de configurația structurii și tipul încărcării, ci și de neomogenitatea fizică, adică de modul de distribuție a rezistențelor.

b) Modul de acționare în timp al încărcării influențează de asemenea procesul de cedare accelerată. Astfel, pentru încărcarea statică monotonă, redistribuția eforturilor se produce integral, din condiția de menținere a echilibrului static al structurii. În cazul cînd viteza de încărcare este mare, această redistribuție este parțială, între $\delta\sigma$ și $\Delta\sigma$ existînd un ecart în timp. La viteze de încărcare foarte mari și de scurtă durată se poate ajunge fie la mecanism general, fie la mecanisme locale (deteriorări locale).

c) În cazul cînd din distribuția rezistențelor locale rezultă zone cu aglomerări de elemente slabe și în vecinătate o zonă cu aglomerare de elemente rezistente, criteriul (4.36) nu va exprima limita de cedare a structurii, deoarece este posibil ca cedările succesive accelerate a elementelor slabe respective să fie stopate de prezența elementelor rezistente, structura suportînd în continuare o încărcare suplimentară. Acest caz poate apare în două situații: fie atunci cînd curba înfășurătoare a histogramei, rezistențelor nu e continuă și prezintă un salt sau are două maximuri, fie în cazul cînd distribuția rezistențelor în masa corpului (elementele structurii) nu e uniformă (exemplu: zone de defecte de turnare, segregări, zone corodate). Apariția unor aglomerări de elemente, avînd rezistențe cu valori apropiate are probabilitatea redusă într-o distribuție obținută prin intermediul generării automate de numere aleatoare.

Pentru a ilustra cele expuse mai sus, se consideră cazul simplificat al unui corp solicitat la o stare de tensiune uniformă. Funcția densității distribuției $f(R)$ se consideră continuă, între R_{min} și R_{max} (fig. 4.12). Pentru un nivel de solicitare P_i, volumul capabil de a prelua încărcarea este V_i, iar efortul unitar în porțiunea validă a corpului este σ_i. Presupunînd că toate părțile corpului contribuie identic la preluarea sarcinii P_i, se obține:

$$P_i = \alpha \cdot V_i \cdot \sigma_i.$$

iar

$$V_i = V_0 \cdot \int_{\delta_i}^{Rmax} f(\sigma)\, d\sigma = V_0 \left[1 - \int_{Rmin}^{\delta_i} f(\sigma) d\sigma\right]. \qquad (4.37)$$

Scanned with OKEN Scanner

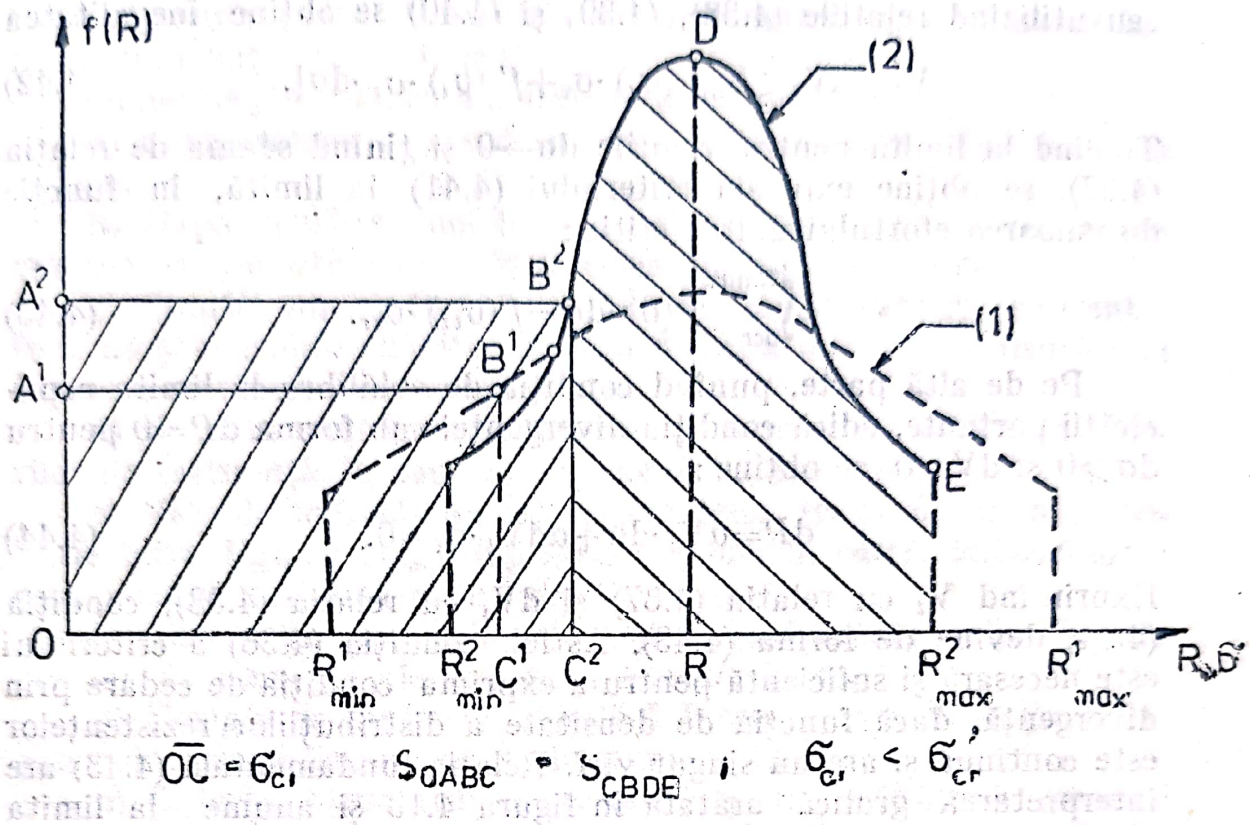


Fig. 4.12.

În urma creşterii efortului unitar σ_i cu $d\sigma_1$, va ceda o porţiune din corpul solicitat de volumul dV_1, exprimat prin:

$$dV_1 = -V_0 f(\sigma_i) d\sigma_1. \tag{4.38}$$

Datorită acestor cedări. prin redistribuţie efortul unitar creşte cu $d\sigma_2$, care va avea valoarea:

$$a\sigma_2 = d\left(\frac{P}{aV_i}\right) = -\frac{P}{aV_i^2} dV_1 = \sigma_i \frac{dV_1}{V_i}. \tag{4.39}$$

Creşterea efortului unitar cu $d\sigma_2$ va determina cedarea unei noi porţiuni de volum dV_2:

$$dV_2 = -V_0 f(\sigma_i + d\sigma_1) \cdot d\sigma_2; \tag{4.40}$$

Criteriul de cedare (4.36) se va exprima sub forma:

$$\frac{dV_2}{V_i - dV_1} \geqslant \frac{dV_1}{V_i}, \tag{4.41}$$

sau utilizînd relaţiile (4.38), (4.39) şi (4.40) se obţine inegalitatea

$$V_i - \Delta V_1 \leqslant V_0[f(\sigma_i)\cdot\sigma_i + f'(\sigma_i)\cdot\sigma_i\cdot d\sigma]. \tag{4.42}$$

Trecînd la limită pentru valorile $d\sigma \to 0$ şi ţinînd seama de relaţia (4.37), se obţine expresia criteriului (4.41) la limită, în funcţie de valoarea efortului unitar critic:

$$\int_{\sigma cr}^{Rmax} f(\sigma)\cdot d\sigma = f(\sigma_{cr})\cdot\sigma_{cr}. \tag{4.43}$$

Pe de altă parte, punînd condiţia de echilibru la limita capacităţii portante, adică condiţia divergenţei sub forma $dP=0$ pentru $d\sigma>0$ şi $dV<0$, se obţine:

$$dP = \alpha V_i\cdot d\sigma + \alpha dV_i\cdot\sigma_i = 0. \tag{4.44}$$

Exprimînd V_i cu relaţia (4.37) şi dV_i cu relaţia (4.38), condiţia (4.44) devine de forma (4.43). Astfel, condiţia (4.36) a criteriului este necesară şi suficientă pentru a exprima condiţia de cedare prin divergenţă, dacă funcţia de densitate a distribuţiilor rezistenţelor este continuă şi are un singur vîrf. Relaţia fundamentală (4.43) are interpretarea grafică arătată în figura 4.13 şi anume: la limita echilibrului stabil al structurii, *aria cuprinsă între curba* $f(\sigma)$ *de la ordonata valorii lui* σ_{cr}, S_{CBDE}, *este egală cu aria dreptunghiului* $OABC$. Din figura 4.13 se observă că pentru un corp mai omogen (curba 2), valoarea lui σ_{cr} este mai mare, ceea ce reflectă faptul, discutat în paragraful 4.1, că cedarea prin degradări succesive este cu atît mai probabilă cu cît structura sau corpul respectiv este mai eterogen la scara macrostructurală.

4.3. PROGRAMUL „CØLAPS" DE ANALIZA CEDĂRII UNEI STRUCTURI ALCĂTUITE DIN ELEMENTE FĂRĂ COMPORTARE DUCTILĂ

Pentru descrierea comportării şi stabilitea încărcării ultime a unei structuri alcătuite exclusiv din elemente elastice şi fără comportare ductilă, autorii au elaborat un program de calcul utili-

Scanned with OKEN Scanner

zînd elemente finite, la modelarea matematică a componentelor structurale ale structurii reale.

Ipotezele pentru care s-a alcătuit programul sînt :

a) Comportarea elementului finit este *ideal elastică* pînă la cedare.

b) După apariţia unei fisuri în elementul finit, acesta devine *ortotrop*, cu rigiditate nulă în direcţia normală pe fisură.

c) *Fisurile nu se închid*, astfel că la descărcare elementul finit nu-şi recapătă rigiditatea după direcţia normală la fisură nici în cazul eforturilor de compresiune.

d) Cedarea unui element finit se produce prin atingerea valorilor de rezistenţă R_t sau R_c a elementului finit respectiv.

e) Valorile individuale ale rezistenţelor R_t şi R_c au o distribuţie între R_{min} şi R_{max} după o *histogramă* a cărei înfăşurătoare este o curbă continuă *cu un singur maxim*.

f) Distribuţia perechilor de valori individuale (R_t, R_c) în reţeaua de elemente ale structurii este aleatoare.

g) *Treapta de încărcare iniţială* δP este o dată a programului şi *se reduce* după fiecare cedare de elemente finite.

h) Cedarea structurii se testează prin verificarea *formării mecanismului* şi prin criteriul de cedare la *divergenţa echilibrului* printr-o condiţie energetică şi formulată în paragraful 4.2.

Referitor la ipoteza „d", provitoare la criteriile de cedare ale unui element finit, în funcţie de natura stării de tensiune plane, în programul CØLAPS au fost admise următoarele condiţii de cedare:

1) $\sigma_1 - \nu\sigma_2 \geqslant R_t$, cînd $\sigma_1 > 0$ şi $\sigma_2 > 0$ (întinderi)

2) $(\sigma_1/R_t)^2 + (\sigma_2/R_c)^2 \geqslant 1$, cînd $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 < 0$ (compresiune)

3) $\sigma_1^2 + \sigma_1^2 - 2\gamma\sigma_1\sigma_2 + R_c(\sigma_1 + \sigma_2) \geqslant 2R_c^2$, pentru $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ (compresiune)

unde $\gamma = R_t/R_c$.

Pentru a se realiza o distribuţie cît mai întîmplătoare a rezistenţelor în cuprinsul structurii, programul conţine o subrutină de generare a numerelor aleatoare şi de clasare a acestora pe grupe, conform unei histograme ale cărei caracteristici intră ca date iniţiale ale problemei. Astfel, utilizatorul, pe baza unei funcţii admise pentru distribuţia rezistenţelor (curba Gauss pentru distribuţii normale, curbe pentru distribuţia log-normală sau extrema I) şi a unui coeficient de variaţie V_s, stabileşte numărul de clase de

Scanned with OKEN Scanner

rezistență și frecvențele, respectiv numărul de elemente finite corespunzătoare fiecărei clase. Subrutina amintită atribuie fiecărui element finit, în mod aleatoriu, o pereche de rezistențe R_t, R_c. Este de menționat că histograma rezistențelor este identică pentru R_t și R_c, cele două rezistențe fiind strîns corelate, adică nefiind două distribuții independente. Stabilirea tipului de distribuție, normală sau extreme, ca și coeficientul de variație V_s se face de către utilizator în funcție de specificul problemei respective.

În figura 4.13 este arătat modul în care programul urmărește evoluția răspunsului structurii. Pe măsura cedărilor, rigiditatea ansamblului scade, respectiv dreptele OK_i se înclină spre axa Of. Segmentele A_1, B_1, A_2, B_2 ... reprezintă deplasările structurii datorită cedării elementelor și scăderii rigidității. Punctele B_1, B_2 ... corespund încărcării statice. În cazul solicitării cu viteză de încărcare mare, redistribuția tensiunilor în urma cedărilor nu mai are loc, condiția de echilibru static nefiind îndeplinită fără considerarea forțelor de inerție. Pentru această situație, punctele C_2, C_3 ... se înscriu pe curba $P-f$ corespunzătoare. Segmentele A_1C_2, C_2C_3,... sînt paralele cu dreptele OK_1, OK_2,... Se observă că pentru obținerea ramurii descendente a curbei $P-f$, după atingerea valorii

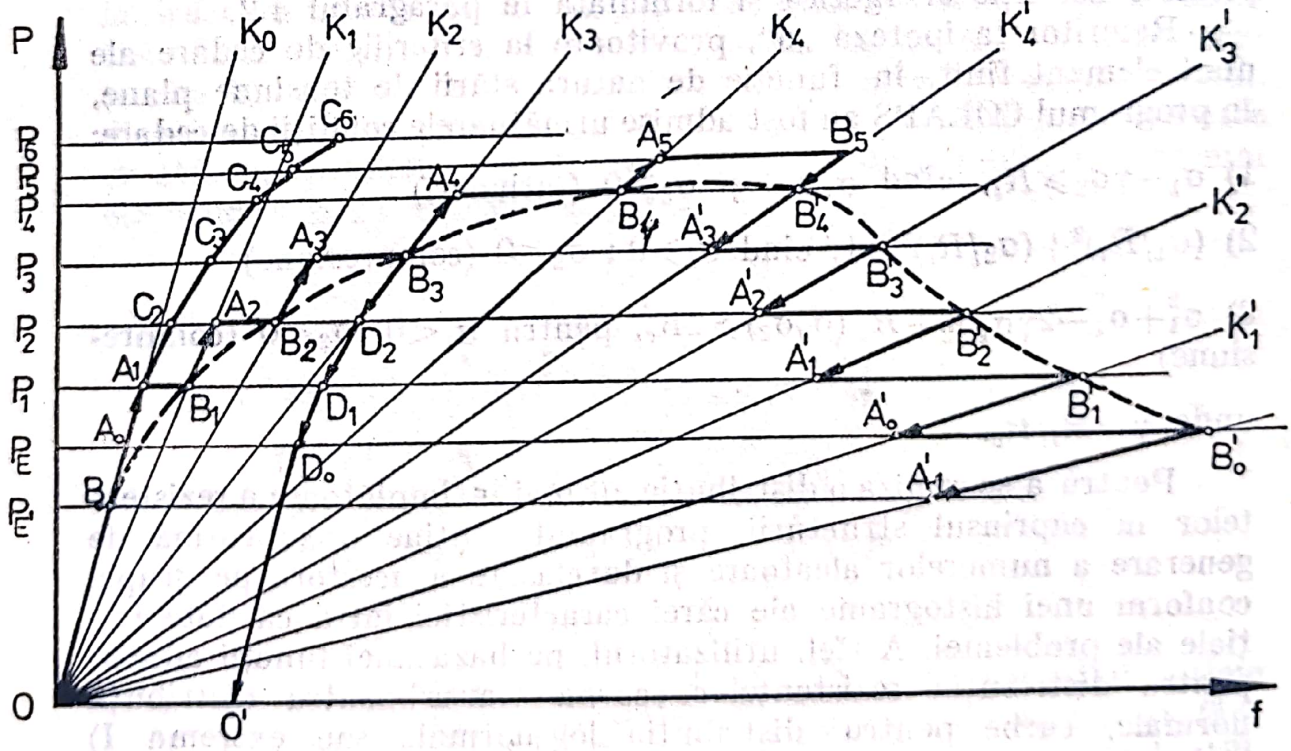


Fig. 4.13.

Scanned with OKEN Scanner

limită de divergenţă $P_{cr} \simeq P_4$, este necesară scăderea treptei de încărcare, care în situaţia rigidităţii mult scăzute a structurii nu poate împiedica cedările şi implicit creşterea accelerată a deplasării f. Ramura descendentă este indicată prin punctele B_1', B_3' ...

Pentru efectuarea testării divergenţei, la fiecare treaptă de încărcare se determină valoarea δW_i, cu relaţia

$$\delta W_i = \sum_{l=1}^{Ni} \{\sigma_i\}_l^T \, D^{-1} \cdot \{\delta\sigma_i\}_l \, v_l + \sum_{l=1}^{Ni} \{\delta\sigma_i\}_l \cdot D^{-1} \cdot \{\delta\sigma_i\}_l v_l,$$

unde: N_i este numărul elementelor finite valide la treapta de încărcare P_i;

v_l — este volumul elementului finit curent „l".

Energia elastică acumulată pînă la treapta de încărcare P_i în structură este:

$$W_i = \sum_{j=1}^{i} \delta W_j.$$

În momentul cedării unor elemente finite, energia eliberată ΔU_i^K se determină cu relaţia:

$$\Delta U_i^k = \sum_{l=1}^{\Delta Nik} \sum_{i=1}^{i} \{\sigma_i\}_l^T \cdot D^{-1} \cdot \{\delta\sigma_j\}_l v_l + \sum_{l=1}^{\Delta Nik} \sum_{i=1}^{i} \{\delta\sigma_i\}_l \cdot D^{-1} \{\delta\sigma_i\}_l v_l,$$

unde ΔN_{ik} este numărul elementelor finite cedate la treapta de încărcare „i" şi subtreapta de redistribuţie a tensiunilor „k".

În figura 4.14 este ilustrat modul de variaţie al energiei de deformaţie W_i şi al energiei eliberate ΔU_i pentru cazul unui corp cu stare de tensiune uniformă în tot volumul. Curbele V_0, V_1, V_2, ... sînt parabole de gradul doi, deoarece în acest caz, energia elastică are expresia:

$$W_i = \frac{1}{2E} \sigma_i^2 \cdot V_i.$$

Datorită cedărilor succesive, volumul corpului capabil de a prelua tensiuni se reduce: $V_0 > V_1 > V_2 > \ldots$ Valoarea energiei eliberate ΔU_i este reprezentată de segmentele verticale pe diagrama $W-\sigma$. Curba întreruptă B_1, B_2, B_3, ... indică variaţia energiei de deformaţie, corespunzătoare punctelor de pe diagrama de încărcare $P-f$.

Scanned with OKEN Scanner

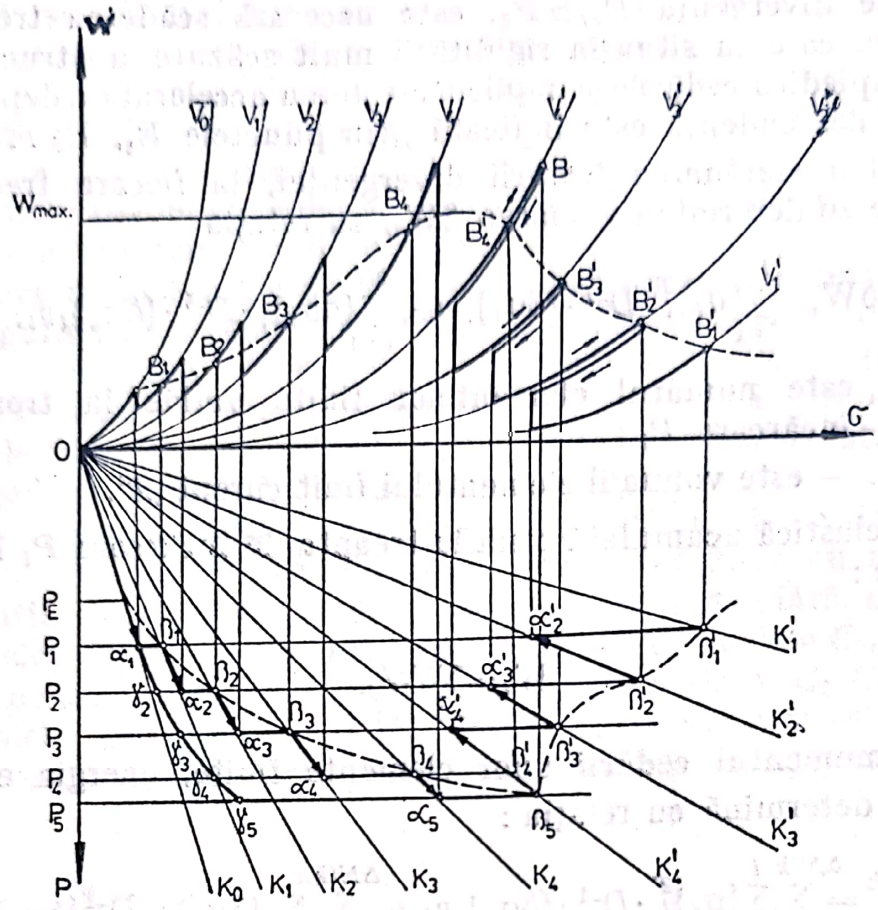


Fig. 4.14.

Pentru ilustrarea utilizării programului, se dă mai jos exemplul unei grinzi din beton armat avînd deschiderea de 5,50 m și încărcată conform schemei din figura 4.16. Încărcarea s-a efectuat în trepte $\delta P = 800$ kg. Grinda are secțiunea în T și este armată la partea inferioară cu 6∅ 20 din oțel PC 60.

În figura 4.16 este arătată rețeaua de elemente finite adoptată. Deoarece programul C∅LAPS, în actuala versiune nu cuprinde elemente finite în comportare ductilă pentru modelarea barelor de armătură din oțel cu palier de curgere, acestea au fost modelate cu elemente finite triunghiulare cu lățimea laturii de 8,0 cm și grosime 25,0 cm, avînd aceleași dimensiuni ca elementele finite utilizate la modelarea corpului grinzii ; rezistența limită și modulul de elasticitate pentru aceste elemente finite echivalente s-au considerat :

$$R_{ac} = 3\,600 \frac{18{,}84}{200} = 340 \text{ daN/cm}^2 ; \quad E_{ac} = 2{,}1110^6 \cdot \frac{18{,}84}{200} = 0{,}2 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2.$$

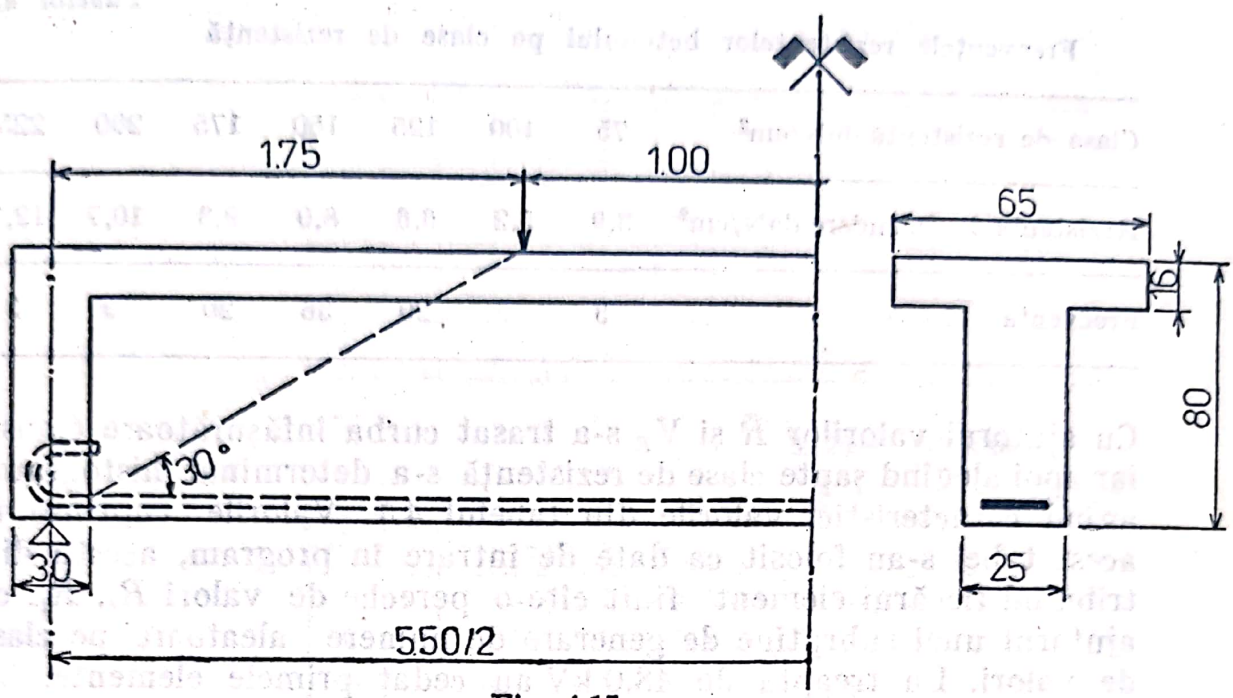


Fig. 4.15.

Pentru corpul grinzii s-a considerat un beton cu rezistența medie la compresiune $R_c=150$ daN/cm² și avînd un coeficient de variație $V_R=17\%$. Rezistențele minimă, respectiv maximă au valorile :

$$R_{min}=\bar{R}\,(1-3V_R)=\ 75\ \text{daN/cm}^2$$

$$R_{max}=\bar{R}\,(1+3V_R)=225\ \text{daN/cm}^2.$$

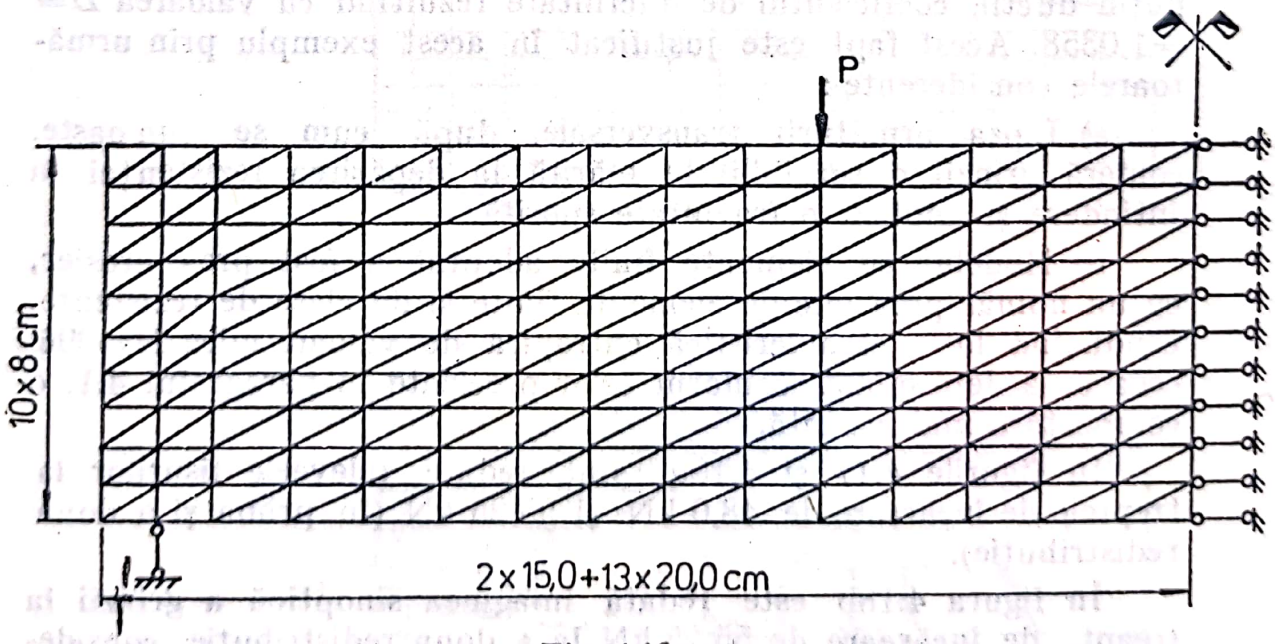


Fig. 4.16.

Tabelul 4.1

Frecvențele rezistențelor betonului pe clase de rezistență

Clasa de rezistență daN/cm²	75	100	125	150	175	200	225
Rezistența la întindere daN/cm²	3,9	5,2	6,6	8,0	9,3	10,7	12,1
Frecvența	3	9	20	36	20	9	3

Cu ajutorul valorilor $\bar{R}$ și V_R s-a trasat curba înfășurătoare Gauss, iar apoi alegînd șapte clase de rezistență s-a determinat histograma avînd caracteristici valorile din tabelul 4.1. Valorile cuprinse în acest tabel s-au folosit ca date de intrare în program, acesta distribuind fiecărui element finit cîte o pereche de valori R_c, R_t, cu ajutorul unei subrutine de generare de numere aleatoare pe clase de valori. La treapta de 48,0 kV au cedat primele elemente, iar la treapta 55,25 kN, după prima redistribuție a eforturilor unitare, cedările s-au accelerat, programul de calcul indicînd atingerea limitei de încărcare.

Deși armătura grinzii nu a atins limita de curgere, eforturile unitare maxime fiind de 26,0 N/mm², grinda a cedat prin divergența echilibrului înainte de formarea mecanismului, ca urmare a cedărilor succesive. Pe de altă parte, cedarea grinzii s-a manifestat foarte puțin ductil, coeficientul de ductilitate rezultînd cu valoarea $D=1{,}0358$. Acest fapt este justificat în acest exemplu prin următoarele considerente:

a) Lipsa armăturii transversale, după cum se cunoaște, conferă grinzii o sensibilitate mărită la depășirea rezistenței la întindere și implicit o fragilitate sporită.

b) Modelul cu elemente finite adoptat a fost prea grosier, cu un număr prea mic de elemente finite și de clase de rezistențe, conducînd la o caracteristică entropică de valoare mică $H=396$, ceea ce a determinat, conform celor precizate în paragraful 4.1, o comportare mai casantă.

În figurile 4.17 și 4.18a sînt redate releveele fisurilor la treptele de încărcare de 48,0 kN și 55,25 kN (în prima și a doua redistribuție).

În figura 4.18b este redată imaginea sinoptică a grinzii la treapta de încărcare de 55,25 kN la a doua redistribuție, conside-

Scanned with OKEN Scanner

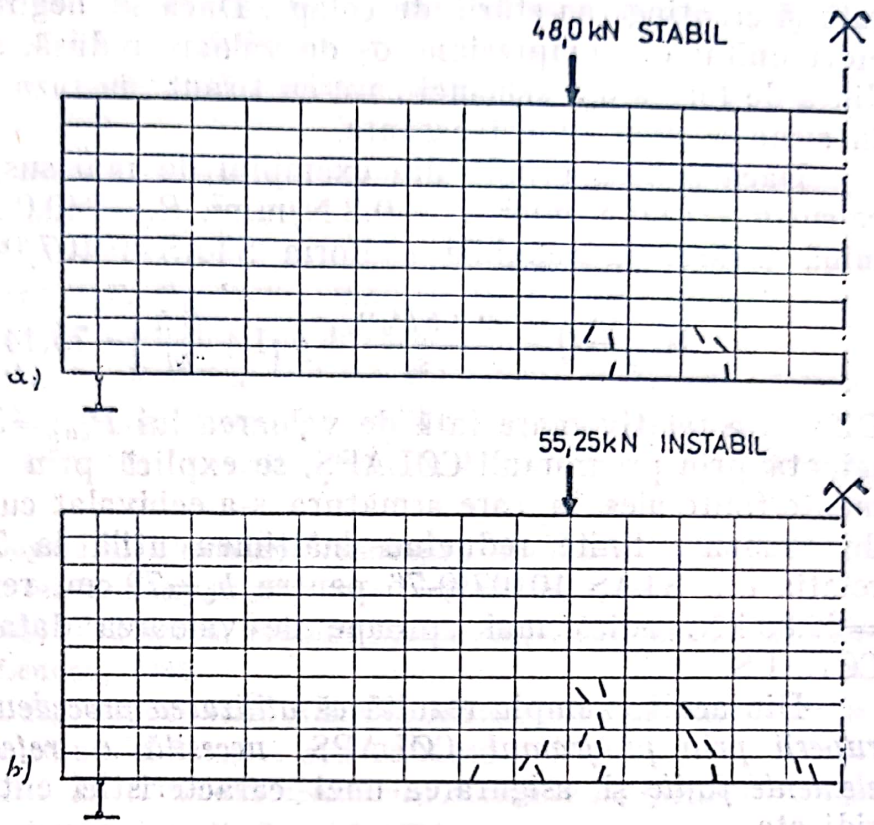


Fig. 4.17.

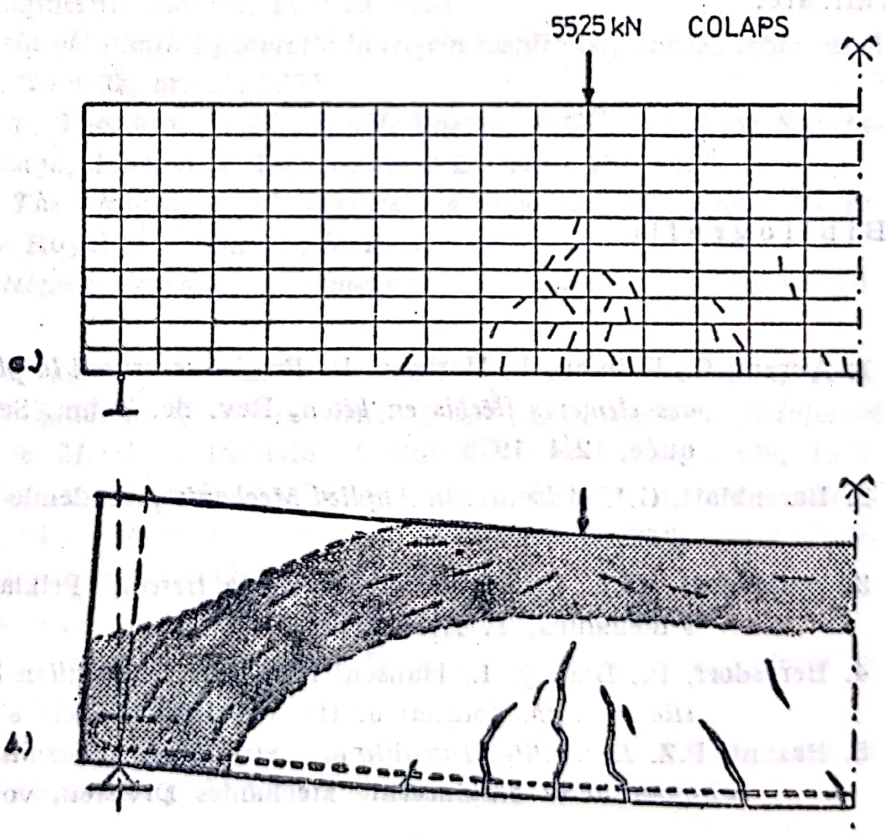


Fig. 4.18.

Scanned with OKEN Scanner

rată și ca atingerea stării de colaps. Dacă se neglijează zonele cu efort unitar de compresiune σ_2 de valoare redusă, se constată tendința de formare a schemei „arc cu tirant" în faza de colaps, chiar în situația unei cedări casante.

Dacă pentru grinda din exemplul de mai sus, cu valorile de calcul $R_c=15{,}0$ N/mm^2, $R_t=0{,}8$ N/mm^2, $R_a=340{,}0$ N/mm^2 se determină încărcarea capabilă conform STAS 10107/0-76, se obține:

$$P_{cap}=Q_b=\frac{0{,}8\, b\, h_0^2 R_t}{s_t}\sqrt{p}\left(1+\frac{Q\, h}{M}\right)=75{,}44 \text{ kN}.$$

Diferența relativ mare față de valoarea lui $P_{cap}=55{,}25$ kN, determinată prin programull CØLAPS, se explică prin modelul cu elemente finite ales, la care armătura s-a echivalat cu rîndul inferior de elemente finite reducînd înălțimea utilă la 72 cm. Aplicînd relația din STAS 10107/0-76 pentru $h_0=72$ cm, rezultă că $P_{cap}=66{,}83$ kN, adică mai aproape de valoarea dată de programul CØLAPS.

Din acest exemplu rezultă că *utilizarea procedeului de simularea ruperii prin programul* CØLAPS, *necesită o rețea* mai *fină de elemente finite* și asigurarea unei caracteristici entropice cît mai ridicate.

Bibliografie

1. Avram, C., Filimon, I., Marinov, R. *Essais concernant la plastification partielle des elements fléchis en béton*, Rev. Sc. Tehn., Serie de Mec. Appliquée, 12/4 1976.
2. Barenblatt, G.I., *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, 1962.
3. Barenblatt, G.I. *Usloicivosti izolirovannih treşcin*, Prikladnaia matematika i mehanica, T. XXIII. nr. 5, 1959.
4. Beresdorf, P., Blakey, I., Hansen, K. *Stress Distribution affects ultimate tensile strength*, Journal of the American Concrete Institute, 6, 1959.
5. Bazant, P.Z. *Instability, Ductility and Size Effect in Strain-Softening Concrete*, Journal of Engineering Mechanics Division, vol. 102, FM2, 1976.

Scanned with OKEN Scanner

6. Bazant, P.Z. *Finite Element Analysis of Wave Difraction by a Crak*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 103, EM3, 1976.
7. Berg, I.O. *Fiziceskie osnovi teorii procinosti betona i jelezobetona*, Gosstroizdat, Moskva, 1961.
8. Bridgeman, P. *Isledovania krupnih deformații i razrușenii*, Grosstroizadt, Moskva, 1955.
9. Cerepanov, G.P. *Mehanika krupkovo razrușenia*, Izd. Nauka Moskva, 1974.
10. Chen, A.C., Chen, W.F. *Constitutive Relations for Concrete*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 101, EM4 1975.
11. Chen, A.C. *Constitutive Equations and Punch-Identation of Concrete*, Journal, of the Engineering Mechanics Division, vol. 102, EM5, 1975.
12. Cioclov, D. *Mecanica ruperii materialelor*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1977.
13. Cișmigiu, Al., Dogaru, L. *Proiectarea rezistenței și ductilității grinzilor și stîlpilor din beton armat*, Revista construcțiilor, nr. 2, 1976.
14. Cowan, A., Kirby, N. *Practical Fracture Mechanics for Structures*, Chapman-Hall London, 1969.
15. Davidenkov, N. N., Iarkov, V. A. *Kasatnîie razrușenie na dvuhosnîm sjatiie*, Jurnal tehniceskoi fiziki, vol. 25, 1956.
16. Filonenko-Borodici, M. *K. Uslovii soprotivlenia materialov na sjiatiie i rastiajenie*, Inginernii Sbornik, Tom 19, 1954.
17. Frenkel, I. *Teoria obratimîh i neobratimîh treșcin tverdîh tel*, Jurnal tehnicescoi fiziki, Tom 22, nr, 11, 1952.
18. Gorzynski, W. J., Thornton, W.A. *Variable Energy Ratio Method for Structural Design*, Journal of the Structural Division, 101. 1975.
19. Griffith, A. A. *The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. Philos*, Trans. of the Royal Soc. London, Serie A, 122—1920.
20. Gvozdeev, A. *Isledovanie kacestva betona i betonnîh soorujenie*, Gosstroizdat, 1959.
21. Gheniev, G.A. *K voprosan sopritivlenia betona*, Gosstroizdat, Moskva, 1958.
22. Hognestad, E.A. *Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members*, Bulletin of University of Illinois, 339, 1951.
23. Ieșan, D. *Teoria termoelasticității*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1971.
24. Irwin, G.R. *Crack—Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate*, Journal of Appl. Mechanics, 29, 1962.
25. Jones, R. *Les essais non destructifs des bétons*, Eyrolles, Paris, 1967.
26. Kecs, W., Teodorescu, P.P. *Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică*, Ed. tehnică, București, 1975.
27. Kupfer, M., Gerstle, K. *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol, 99/EM4, 1975.

Scanned with OKEN Scanner

28. Luca, E. *Elemente de fizică modernă*, Vol. 2, Ed. Junimea, Iaşi, 1976.

29. Marinov, R. *Aplicarea metodei de calcul cu elemente finite la determinarea siguranţei la rupere a structurilor masive de beton*, CNIT, a V-a Conferinţă de betoane, vol. II, Timişoara, 1972.

30. Mehmel, A., Kern, E. *Elastische und Plastische Stauchungen von Beton infolge Druk, Schwell-und Standbelastung*, Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Verlag Ernst u. Sohn. Berlin, 1962.

31. Marcal, P.V., King, I.P. *Elastic Analysis of two-Dimensional Stress systems by the finite elemente method*, Journ. of the Mechanics Science, vol.9, 1967.

32. Massonnet Ch. ş.a. *Calculul structurilor la calculatoarele electronice* (trad. din lb. franceză), Ed, tehnică, Bucureşti, 1974.

33. Novojilov, V.V. *Kosnovam teorii ravnovesnîh treşcin v uprugik telah*, Prikl. matem. i mehanika, T. 33, nr. 5, 1969.

34. Pană, T. *Aplicaţii inginereşti ale mecanicii ruperilor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1975.

35. Polak, A.F. *Osnovî teorii soprotivlenia poristîh materialov*, VNIIST, Moskva, 1958.

36. Rasch, C. *Spannungs-Dehnungslinien des Betons bei konstanter Verformungsgeschwindigkeit*, Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Heft 154, Verlag Ernst, u. Sohn, Berlin, 1962.

37. Rashid, Y.R. *Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels*, Nuclear Engineering and Design, No. 6/1969, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.

39. Rüsch, H., Grasser, E. *Grundlagen für die Bemessung bei Einachsiger Spannungszustanden in Betonbau*, Bericht 47 des MPA für das Bauwesen der T H. München, 1961.

40. Rüsch, H,. Sell, R., Rackwitz R. *Statistische Analyse der Betonfestigkeit*. Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Verlag Ernst u. Sohn, Berlin 1969.

41. Rebinder, P.A. *Fiziceskie i mehaniceskie isledovania proţesov deformaţii tverdîh tel*, Izd. Nauka, Moskva 1947.

42. Testa, R.B. *Concrete Failure Related to Constituent Properties*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 102, 1976.

43. Ţiţeica, S. *Elemente de mecanică statistică*, Ed. tehnică, Bucureşti 1956.

44. Teodosiu, C. *Metode elastice ale defectelor cristaline*, în *Probleme actuale în mecanica solidelor*, Ed. Academiei R.S.R. Bucureşti, 1977.

Scanned with OKEN Scanner

45. Verighin, K.P. *Procinosti betona na sjiatie i rastianutiie deistvie,* Beton i jelezo-beton, nr. 2, 1956.
46. Yamada, Y., Yoshimura, N., Sakurai, T. *Plastic Stress-Strain Matrix and its Applications for the Solution of Elastic-Plastic Problems, by the Finite Element Method,* International Journal of Mechanical Sciences, vol. 10, Pergamon Press, New York, 1968.
47. Zienkiewicz, O., Valliappan, S., King, I. *Elasto-Plastic Solutions of Engineering problems,* International Journal of Numerical Methematics in Engineering, vol. 1, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefață 5

Cap. 1 **Considerații generale asupra metodei de calcul cu elemente finite** 9

1.1. Introducere 9

1.2. Descrierea generală a metodei 12

1.3. Mărimi caracteristice ale elementului finit 16

1.4. Formularea variațională a mărimilor caracteristice ale elementului finit .. 27

1.5. Tipuri de elemente finite și funcții de interpolare 30

1.6. Elemente finite cu fisură 55

1.7. Discretizarea structurii 61

1.8. Asamblarea, rezolvarea sistemului de ecuații, calcule auxiliare 67

Bibliografie 79

Cap. 2 **Exemple de aplicare a elementelor finite în unele probleme inginerești** 80

2.1. Prelucrarea rezultatelor obținute la calculator 80

2.2. Exemplul 1. Diafragmă transversală la structura unei clădiri de locuit cu parter elastic 91

2.3. Exemplul 2. Fundația din beton precomprimat pentru un stand de încercat vagoane 102

Scanned with OKEN Scanner

2.4. Exemplul 3. Planșeu solicitat ca șaibă în planul său 109
2.5. Exemplul 4. Studiul unei grinzi-perete pentru un decantor la o stație de filtre 115
2.6. Exemplul 5. Suprastructura unui pod dalat pentru un pasaj superior 122
2.7. Exemplul 6. Studiul stării de eforturi la o îmbinare sudată 130
Bibliografie 134
Cap.3. **Utilizarea procedeului de calcul prin divizarea în substructuri** 136
3.1. Generalități 136
3.2. Procedeul general de calcul 137
3.3. Structuri alcătuite din substructuri plane 151
3.4. Structuri monotone 159
3.5. Structuri avînd proprietăți reologice 164
Bibliografie 177
Cap.4 **Posibilități privind utilizarea metodei elementelor finite la analiza modului de cedare a structurilor** 178
4.1. Considerații privind ruperea elementelor de beton sau altor materiale eterogene 178
4.2. Simularea cu ajutorul elementelor finite a procesului de cedare a unei structuri 190
4.3. Programul „CØLAPS“ de analiza cedării unei structuri alcătuite din elemente fără comportare ductilă 202
Bibliografie 210

Scanned with OKEN Scanner

Redactor : ION ILIN
Tehnoredactor : IOAN I. IANCU

Bun de tipar : 13.11.1980.
Apărut 1980.
Coli tipar : 13,5.

Întreprinderea poligrafică „Banat"
Timișoara, Calea Aradului nr. 1.
Comanda nr. 39.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Realizarea volumului mare de construcţii-montaj prevăzut în planul cincinal 1981—1985 pune proiectării probleme deosebite legate de promovarea unor structuri de rezistenţă caracterizate prin eficienţă tehnico-economică sporită şi grad de siguranţă maxim. În acest scop, calculatoarele electronice vor cunoaşte o mai largă utilizare înlesnind abordarea unor analize mai detaliate a structurilor. Pe această linie se înscrie şi metoda de calcul cu elemente finite, care a cunoscut în ultimele două decenii o dezvoltare vertiginoasă pe plan mondial. Metoda prezintă multiple avantaje, ceea ce permite analiza statică şi dinamică a oricărui tip de structură şi obţinerea unor informaţii calitativ superioare.

Lucrarea de faţă îşi propune ca prin descrierea succintă a metodei de calcul cu elemente finite şi prin exemplele prezentate şi comentate să-şi aducă contribuţia la popularizarea acestui procedeu de calcul.

Lei 14

10,00